Master 280 - Mido : 18 mai 2017

Pierre Brugière [1]: Risque de Crédit 1h30 corrigé

Exercice 1 [7pts]:

1) Le Z-score de Altman utilise:
a) des variables financières relatives à l'entreprise ?
b) des variables macro économiques ?
c) s'applique uniquement à des entreprises cotées en bourse ?

2) Pour les modèles à intensité la plupart les études faites par Duffie & Co montrent une relation entre l'intensité historique λ_h et implicite λ_i qui est:
a) $\lambda_i = \lambda_h$
b) $\lambda_i = 2 \times \lambda_h$
c) $\lambda_h = 2 \times \lambda_i$

3) Dans un modèle à intensité pour une obligation de recovery rate R d'intensité de défaut λ et de spread de crédit s on a:
a) $s \sim (1-\lambda)R$
b)$s \sim \lambda(1-R)$
c) $s \sim (1-\lambda)(1-R)$

4) Quelles sont les relations qui sont vraies pour un processus de défaut τ d'intensité déterministe λ_s continue:
a) $\forall t > 0,\ P(\tau > t) = exp\Big(-\int_0^t \lambda_s ds\Big)$
b) $\forall t > 0,\ P(\tau > t) = exp\Big(-\int_t^{+\infty} \lambda_s ds\Big)$
c) $\forall t > 0,\ P(\tau < t + dt | \tau > t) = \lambda_t dt + o(dt)$

5) On considère un CDO formé de 30 bonds de probabilité de défaut pour chaque bond 5% et de corrélation de défaut entre les bonds égale à ρ. Toutes choses étant égales quelles assertions sont vraies si ρ augmente:
a) le prix de la tranche senior augmente toujours ?
b) le prix de la tranche junior diminue toujours ?
c) le prix de la tranche mezzanine diminue toujours ?

---

[1] Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

6) Toutes choses étant égales par ailleurs la "Distance to Default"
a) augmente quand la volatilité augmente ?
b) diminue quand la volatilité augmente ?
c) augmente si la valeur de l'actif augmente ?
d) diminue si la valeur de la dette augmente ?

7) Citer deux méthodes pour simuler des variables aléatoires de Bernouilli corrélées

modèles d'infection ou avec paramètre p issu d'une variable aléatoire $\tilde{p}$

8) Dans un modèle structurel quelle est la loi résultante pour la variable aléatoire $\tilde{p}$ (conditionnellement à laquelle les probabilités de défauts sont des Bernouilli de paramètre $\tilde{p}$).

$X_1 = 1 \iff U_i < \Phi(\alpha + \beta Z)$ avec $U_i \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

9) Quelle utilisation fait-on des lois Beta dans la modélisation des CDOs ?

$X_1 = 1 \iff U_i < B$ avec $B \sim Beta(\alpha, \beta)$

10) Quelles assertions sont vraies dans un modèle à infection:
a) la corrélation entre les défauts des bonds est toujours positive ?
b) on peut calibrer pour obtenir n'importe quelle corrélation positive entre les défauts des bonds ?
c) on peut obtenir des corrélations strictement négatives entre les défauts des bonds ?

Exercice 2 [5pts] :
On considère une économie à deux instants (aujourd'hui étant l'instant 0) avec deux états possibles pour l'instant 1. Il y a trois actifs:
◦ L'actif sans risque, de prix aujourd'hui $B(0) = 100$ et de valeur demain pour les deux états du monde possibles $B^1(1) = B^2(1) = 100$
◦ L'action d'une compagnie, de prix aujourd'hui $S(0) = 100$ et de valeurs demain pour les deux états du monde possibles $S^1(1) = 28$ et $S^2(1) = 108$
◦ Le Bond émis par la compagnie, de prix aujourd'hui $C(0)$ et de valeurs demain pour les deux états du monde possibles $C^1(1) = 73$ et $S^2(1) = 103$.

On suppose qu'il n'y a pas d'arbitrage possible au sens mathématique du terme.

[0.5pt] 1) Comment s'énonce l'hypothèse mathématique d'absence d'opportunité d'arbitrage ?
solution:
il n'existe pas de stratégie à coût nulle aujourd'hui qui produise des valeurs strictement positives demain quelque soit l'état du monde

[1pt] 2) Calculer la probabilité risque neutre (π_1, π_2) de l'économie
solution:
$\pi_1 = \frac{1}{10}$ et $\pi_2 = \frac{9}{10}$

[0.5pt] 3) Calculer $C(0)$
solution:
$C(0) = \frac{1}{10}73 + \frac{9}{10}103 = 100$

[1pt] 4) Par quelle stratégie d'investissement et de financement peut on construire un portefeuille qui replique le Bond émis par la compagnie ?
solution:
on construit une position de α Bonds sans risque et de β actions tels que: $(\alpha 100 + \beta 28) = 73$ et $(\alpha 100 + \beta 108) = 103 \Longrightarrow \alpha = \frac{5}{8}$ et $\beta = \frac{3}{8}$

[0.5pt] 5) Retrouver l'aide de 4) le prix $C(0)$ du bond aujourd'hui
solution:
la valeur du portefeuille répliquant est $\frac{5}{8}B(0) + \frac{3}{8}S(0) = 100 = B(0)$

On continue à supposer ici qu'il n'y a pas d'arbitrage possible, et que $C(0)$ vaut la valeur trouvée en 3) mais un trader suppose qu'il y a en fait une possibilité de troisième état possible à l'instant 1 dans laquelle les actifs vaudront : $B^3(1) = 100$, $S^3(1) = 0$ et $C^3(1) = 60$

[1pt] 6) Expliciter une stratégie que ce trader peut mettre en place et qui lui permet de gagner de l'argent dans certains cas et de ne jamais en perdre. (On suppose que tous les actifs peuvent être vendus à découvert).
solution:
il construit une stratégie où il achète $\frac{5}{8}$ actif sans risque $\frac{3}{8}$ action et vend à découvert 1 bond corporate. Coût initial nul et à maturité net 0 dans les états 1 et 2 et gain $\frac{5}{8} \times 100 - 60 > 0$ dans l'état 3.

[0.5pt] 7) le résultat de 6) est-il contradictoire avec l'hypothèse mathématique

d'absence d'opportunité d'arbitrage et l'existence d'une probabilité risque neutre.
solution:
non car le gain n'est pas > 0 dans tous les cas.

Exercice 3 [8pts]:
On considère un modèle à deux instants. On note:
∘ Z_i des lois normales $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes
∘ Z une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ independante des Z_i
∘ Φ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$
∘ $\Phi_{2,\rho}$ la fonction de répartion de la loi binormale $\mathcal{N}\begin{pmatrix}1 & \rho \\ \rho & 1\end{pmatrix}$

Pour $\alpha_i,\ \beta_i \in \mathbf{R}$ on définit les variables aléatoires de Bernouilli X_i par: $X_i = 1 \Longleftrightarrow Z_i < \alpha_i + \beta_i Z$. Dans cette modélisation $X_i = 1$ si le Bond i est en défaut à l'instant 1 et $X_i = 0$ sinon. On note $p_i = E[X_i]$

[1pt] 1) exprimer $E[X_i]$ en fonction de α_i, β_i et Φ
Solution:
$E[X_i] = P(Z_i < \alpha_i + \beta_i Z) = P(\frac{Z_i - \beta_i Z}{\sqrt{1+\beta_i^2}} < \frac{\alpha_i}{\sqrt{1+\beta_i^2}}) = \Phi(\frac{\alpha_i}{\sqrt{1+\beta_i^2}})$

[1pt] 2) exprimer $E[X_1X_2]$ en fonction de α_1,α_2, β_1,β_2 et $\Phi_{2,\gamma_{1,2}}$
Solution:
$E[X_1X_2] = P(Z_1 < \alpha_1 + \beta_1 Z, Z_2 < \alpha_2 + \beta_2 Z)$
$= P(\frac{Z_1-\beta_1 Z}{\sqrt{1+\beta_1^2}} < \frac{\alpha_1}{\sqrt{1+\beta_1^2}}, \frac{Z_2-\beta_2 Z}{\sqrt{1+\beta_2^2}} < \frac{\alpha_2}{\sqrt{1+\beta_2^2}}) = \Phi_{2,\gamma_{1,2}}(\frac{\alpha_1}{\sqrt{1+\beta_1^2}}, \frac{\alpha_2}{\sqrt{1+\beta_2^2}})$
avec $\gamma_{1,2} = \rho(\frac{Z_1-\beta_1 Z}{\sqrt{1+\beta_1^2}}, \frac{Z_2-\beta_2 Z}{\sqrt{1+\beta_2^2}}) = \frac{\beta_1\beta_2}{\sqrt{1+\beta_1^2}\sqrt{1+\beta_2^2}}$

[1pt] 3) montrer que $E[X_1X_2] = E[\Phi(\alpha_1 + \beta_1 Z)\Phi(\alpha_2 + \beta_2 Z)]$
Solution:
$E[X_1X_2] = E[1_{Z_1<\alpha_1+\beta_1 Z} 1_{Z_2<\alpha_2+\beta_2 Z}]$
$= E\Big(E[1_{Z_1<\alpha_1+\beta_1 Z} 1_{Z_2<\alpha_2+\beta_2 Z}|Z]\Big)$
$= E\Big(\Phi(\alpha_1 + \beta_1 Z)\Phi(\alpha_2 + \beta_2 Z)\Big)$

[1pt] 4) montrer que $\rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(\Phi(\alpha_1+\beta_1 Z), \Phi(\alpha_2+\beta_2 Z))}{\sqrt{p_1(1-p_1)}\sqrt{p_2(1-p_2)}}$
Solution:
$E[X_1] = E(1_{Z_1<\alpha_1+\beta_1 Z}) = E(E[1_{Z_1<\alpha_1+\beta_1 Z}|Z]) = E[\Phi(\alpha_1 + \beta_1 Z)]$
donc
$\rho(X_1, X_2) = \frac{E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]}{\sqrt{E[X_1](1-E[X_1])}\sqrt{E[X_2](1-E[X_2])}} = \frac{E[\Phi(\alpha_1+\beta_1 Z)\Phi(\alpha_2+\beta_2 Z)] - E[\Phi(\alpha_1+\beta_1 Z)]E[\Phi(\alpha_2+\beta_2 Z)]}{\sqrt{p_1(1-p_1)}\sqrt{p_2(1-p_2)}}$
Q.E.D

5) Montrer que
[1pt]a) $\forall p_1, p_2 \in]0,1[$, $\exists \alpha_1\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ tels que: $\rho(X_1, X_2) = 0$, $E[X_1] = p_1$ et $E[X_2] = p_2$
[1pt]b) $\forall \rho \in]0,1[, \forall p \in]0,1[$, $\exists \alpha_1\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ tels que: $\rho(X_1, X_2) = \rho$ et $E[X_1] = E[X_2] = p$
[1pt] c) $\forall \rho \in]-1,0[, \forall p \in]0,1[$, $\exists \alpha_1\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ tels que: $\rho(X_1, X_2) = \rho$ $E[X_1] = 1 - E[X_2] = p$

Solution:
a) si $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 = 0$ alors $Cov(\Phi(\alpha_1), \Phi(\alpha_2)) = 0$ et $\rho(X_1, X_2) = 0$ on prend alors $\alpha_i = \Phi^{-1}(p_i)$ Q.E.D

b) si $X_i = 1 \Longleftrightarrow Z_i < \lambda(\alpha + Z)$ alors
$\Phi(\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{1+\lambda^2}}) = p \Longleftrightarrow \alpha = \Phi^{-1}(p)\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}} = \alpha(\lambda)$
soit $\rho(\lambda) = \frac{Var(\Phi(\lambda(\alpha(\lambda)+Z)))}{E(\Phi(\lambda(\alpha(\lambda)+Z)))(1-E(\Phi(\lambda(\alpha+Z))))}$ on remarque que:
∘ $\rho(\lambda)$ est continue
∘ $\rho(0) = 0$ et que
∘ $\Phi(\lambda(\alpha(\lambda) + Z))$ converge vers une loi de Bernouilli quand $\lambda \longrightarrow +\infty$ ce qui entraine que $\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \rho(\lambda) = 1$ et donc $\exists \lambda^*, \rho(\lambda^*) = \rho$.
si on définit X_i^λ par $X_i^\lambda = 1 \Longleftrightarrow Z_i < \lambda(\alpha(\lambda) + Z)$ on a donc: $\rho(X_1^{\lambda^*}, X_2^{\lambda^*}) = \rho$ et $E[X_1^{\lambda^*}] = E[X_2^{\lambda^*}] = p$

c) considérer le modèle $X_1^\lambda = 1 \Longleftrightarrow Z_1 < \lambda(\alpha + Z)$, $X_2^\lambda = 1 \Longleftrightarrow Z_2 < -\lambda(\alpha + Z)$ en remarquant que $P(Z_2 < -\lambda(\alpha + Z)) = P(-Z_2 > \lambda(\alpha + Z)) = 1 - P(-Z_2 < \lambda(\alpha + Z)) = 1 - p_1$