

**[10pts]Exercice 1:**

1. Qu'est-ce que le  $Z$  - score de Altman?  
**Correction:** Un score pour prédire le risque de défaut avec comme inputs des ratios financiers de la société considérée
2. Ecrire la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  constant  
**Correction:**  $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$
3. Ecrire la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre  $\lambda(t)$  déterministe dépendant du temps  
**Correction:**  $F(t) = 1 - \exp(-\int_0^t \lambda(s) ds)$
4. Ecrire la fonction de répartition d'une loi de Cox de paramètre  $\lambda(X_s)$   
**Correction:**  $F(t) = 1 - E[\exp(-\int_0^t \lambda(s) ds)]$
5. Comment peut-on approximer le spread  $S$  à partir du recovery rate  $R$  et de l'intensité constante  $\lambda$  du processus de défaut?  
**Correction:**  $S \sim \lambda(1 - R)$
6. Que signifie CDO?  
**Correction:** Collateralized Debt Obligation
7. On considère un CDO formé de 50 bonds de probabilité de défaut pour chaque bond égale à 5% et de corrélation de défaut entre eux égale à  $\rho$ . Toutes choses étant égales par ailleurs que se passe-t-il en général si  $\rho$  baisse:
  - a) pour le prix de la tranche senior? **Correction:** augmente
  - b) pour le prix de la tranche junior? **Correction:** diminue
  - c) pour le prix de la tranche mezzanine? **Correction:** dépend
8. Comment crée-t-on de la corrélation entre les événements de défaut dans un modèle d'intensité?  
**Correction:** En utilisant des processus d'intensités corrélés
9. Quel est l'intérêt des processus de Cox?  
**Correction:** d'avoir un processus d'intensité stochastique et donc de pouvoir créer de la corrélation entre les processus de défaut (qui conditionnellement à la connaissance du processus d'intensité sont indépendants)

---

<sup>1</sup>Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

10. Comment fonctionne un modèle de contagion?  
**Correction:** Le défaut peut-être intrinsèque avec une probabilité  $p$  ou venir avec une probabilité  $q$  d'un autre défaut intrinsèque
11. Qu'est-ce que le "Diversity Score"?  
**Correction:** Le nombre d'actifs indépendants qui donneraient la même espérance et variance de perte
12. Peut on trouver deux var de Bernouilli  $X_1$  et  $X_2$  de paramètres 10% avec une corrélation de 100%?  
**Correction:** Non
13. Quelle est la variance maximale que peut avoir une variable aléatoire à valeurs dans  $[0, 1]$ ?  
**Correction:**  $\frac{1}{4}$
14. Dans les modèles de défaut ou  $X_i < 1 \implies Z_i < \tilde{p}$  avec zéro recovery rate par quel loi approxime-t-on  $\sqrt{n}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E[\tilde{p}])$  quand  $n$  est grand ?  
**Correction:**  $\mathcal{L}(\tilde{p})$
15. Quelle est l'espérance d'une loi Beta de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ ?  
**Correction:**  $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
16. Qu'est-ce qu'une copule?  
**Correction:** Une fonction de répartition de n-uplet de lois uniformes sur  $[0, 1]$

**[10pts] Problème :**

On appelle Copula Archimédienne une copula qui peut s'écrire sous la forme

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots, \phi(u_d)).$$

Soit  $Z$  une variable aléatoire de densité  $g$  telle que  $P(Z > 0) = 1$

Soit  $M$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $M(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xx} g(z) dz$

1. **[1pt]** Que vaut  $M([0, +\infty[)$ ?

**Correction:**  $]0, 1]$ . La valeur 1 est atteinte pour  $x = 0$

2. **[1pt]** Pourquoi  $M$  est elle inversible ?

**Correction:**  $M$  est continue et strictement décroissante

On note  $M^{-1}$  l'inverse de  $M$  et on note  $V_1, \dots, V_d$  des lois uniformes sur  $[0, 1]$  indépendantes de  $Z$

3. **[2pts]** Montrer que  $M(\frac{-\ln(V_1)}{Z})$  est une loi uniforme sur  $[0, 1]$

**Correction:** Soit  $u \in ]0, 1[$

$$P(M(\frac{-\ln(V_1)}{Z}) < u) = P(V_1 < \exp(-M^{-1}(u)Z)) = E[1_{V_1 < \exp(-M^{-1}(u)Z)}]$$

$$= E[E[1_{V_1 < \exp(-M^{-1}(u)Z)} | Z]] = E[\exp(-M^{-1}(u)Z)]$$

on remarque  $M(x) = E[\exp(-xZ)]$

donc,  $E[\exp(-M^{-1}(u)Z)] = M(M^{-1}(u)) = u$  Q.E.D

Pour  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , on pose  $U_i = M(\frac{-\ln(V_i)}{Z})$

4. **[2pts]** Calculer la copule définie par  $(U_1, \dots, U_d)$ . Est-elle archimédienne ?

**Correction:** Soient  $u_i \in ]0, 1[$

$$P(U_1 < u_1, \dots, U_d < u_d) = P(V_1 < \exp(-M^{-1}(u)Z), \dots, V_d < \exp(-M^{-1}(u)Z))$$

$$= E[E[1_{V_1 < \exp(-M^{-1}(u_1)Z)}, \dots, 1_{V_d < \exp(-M^{-1}(u_d)Z)} | Z]]$$

$$= E[\exp(-M^{-1}(u_1)Z) - \dots - \exp(-M^{-1}(u_d)Z)] \text{ (indépendance) des } V_i$$

$$= E[\exp(-[M^{-1}(u_1) - \dots - M^{-1}(u_d)]Z)]$$

$$= M(M^{-1}(u_1) + \dots + M^{-1}(u_d))$$

donc copula Archimédienne avec  $\phi = M^{-1}$  Q.E.D

Pour  $\alpha > 1$ , on prend à partir de maintenant  $g(z) = Cz^{\alpha-1}e^{-\alpha z}1_{z>0}$  ( $C$  est la constante qui fait que l'intégrale vaut 1).

5. **[2pts]** Calculer  $M(x)$

$$\mathbf{Correction:} M(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xz} e^{-\alpha z} z^{\alpha-1} dz$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(x+\alpha)z} z^{\alpha-1} dz = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha(\frac{x+\alpha}{\alpha}z)} (\frac{x+\alpha}{\alpha}z)^{\alpha-1} (\frac{x+\alpha}{\alpha})^{1-\alpha} dz$$

si  $u = \frac{x+\alpha}{\alpha}z$  alors  $du = \frac{x+\alpha}{\alpha}dz$  et

$$M(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} u^{\alpha-1} (\frac{x+\alpha}{\alpha})^{-\alpha} du = (1 + \frac{x}{\alpha})^{-\alpha}$$

6. **[2pts]** Calculer la copule définie par  $(U_1, \dots, U_d)$ .

**Correction:**  $(1 + \frac{x}{\alpha})^{-\alpha} = y \iff x = (y^\alpha - 1)\alpha$

La copule est définie par

$$C(u_1, \dots, u_d) = (1 + \frac{(u_1^\alpha - 1) + \dots + (u_d^\alpha - 1)}{\alpha})^{-\alpha} = (u_1^\alpha + \dots + u_d^\alpha - (d-1))^{-\alpha}$$

c'est donc la copule de Clayton