Master M1 - Mido 13th January 2020

Exam: Portfolio Management [1]: 1h30

Exercise 1: [8pts]

When there is a risk-free asset of return r_0, we remind the Security Market Line equation for all investment portfolios of returns R_P:

$$R_P - r_0 = \beta_T(P)(R_T - r_0) + \epsilon_P \tag{1}$$

with $\beta_T(P) = \frac{\mathbf{Cov}(R_P,R_T)}{\sigma^2(R_T)}$ and ϵ_P independent from the return R_T of the Tangent Portfolio.

We assume that $\sigma_T = 20\%$. Complete the table below and indicate the values of m_T and r_0.

Portfolio	$E(R_{P_i})$	$\beta_T(P_i)$	$\sigma(R_{P_i})$	$\sigma(\epsilon_{P_i})$
P_1	15%	0.5	20%	?
P_2	?	2	?	0
P_3	25%	?	20%	?
P_4	35%	1.5	?	10%

Exercise 2: [8pts]

We consider the factor model $R = A + BF + \epsilon$ with

$$A = \begin{pmatrix} 1\% \\ 2\% \\ 3\% \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \text{ and } \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix}.$$

We assume that F and ϵ are independent, that $E[F] = 0$, $E[\epsilon] = 0$ and that $\mathbf{Var}(F) = \Sigma_F$ is invertible.

1. **[1pt]** Show that the model is an APT model and calculate the values of λ_0, λ_1, λ_2. From now on we will note $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

2. **[1pt]** In the reduced model $R = A + BF$ find the expressions of the allocations of the investment portfolios which are without risk and calculate the returns of these portfolios.

[1] Pierre Brugière University Paris 9 Dauphine

3. **[1pt]** In the reduced model $R = A + BF$ show that there is no self-financing portfolio which is without risk.

4. In the factor model, let $R(\pi)$ be the return of the portfolio π and β^* be the solution of

$$\arg\min_{\beta \in \mathbb{R}^2} \mathbf{Var}(R(\pi) - \beta' F)$$

   (a) **[1pt]** express β^* as a function of $\mathbf{Cov}(F, R(\pi))$ and Σ_F

   (b) **[1pt]** express β^* as a function of B and π and give the expression of $\mathbf{Var}(R(\pi) - \beta^{*\prime} F)$ as a function of π and $\mathbf{Var}(\epsilon)$

   (c) **[0.5pt]** show that $\mathbf{E}(R(\pi)) = \lambda_0 + \beta^{*\prime}\lambda$ if π is an investment portfolio

   (d) **[0.5pt]** show that $\mathbf{E}(R(\pi)) = \beta^{*\prime}\lambda$ if π is a self-financing portfolio

5. **[2pt]** Find a numerical example of a matrix C and vector A such that

$$R = A + CF + \epsilon$$

   is an APT model for which in the reduced model $R = A + CF$ there is no risk-free investment portfolio but some risk-free self-investing portfolios.

Exercise 3.[6pts]

We consider an economy with d risky assets of vector of returns R and a risk-free asset r_0. We assume that $\mathbf{Var}(R) = \Sigma$ is invertible. We remind that the allocation of the Tangent Portfolio is

$$\frac{1}{b - r_0 a} \Sigma^{-1}(M - r_0 1_d)$$

1. **[2pts]** (Most Diversified Portfolio) Show that it is possible to build some portfolios R_D which have the same correlation of returns with all the d risky assets, i.e such that, $\exists c \in \mathbb{R}, \forall i \in [\![1, d]\!],\ \rho(R_i, R_D) = c$.

2. **[2pts]** (Market Portfolio, Tangent Portfolio) Show that once Σ is fixed there is a unique value of M for which the Tangent Portfolio coincides with the Market Portfolio.

3. **[2pts]** (Most Diversified Portfolio, Tangent Portfolio) Show that the Tangent Portfolio has the same correlation with all the d risky assets iff all the d risky assets have the same Sharpe Ratio.

Exercice 1: [8pts]

On rappelle l'équation de la Security Market Line dans une économie avec d actifs risqués et un actif sans risque de rendement r_0. Pour tout portefeuille d'investissement R_P:

$$R_P - r_0 = \beta_T(P)(R_T - r_0) + \epsilon_P \tag{2}$$

avec $\beta_T(P) = \frac{\mathbf{Cov}(R_P, R_T)}{\sigma^2(R_T)}$ et ϵ_P indépendant du rendement R_T du Portefeuille Tangent

On suppose que $\sigma_T = 20\%$. Compléter le tableau ci-dessous et calculer les valeurs de m_T et r_0.

Portefeuille	$E(R_{P_i})$	$\beta_T(P_i)$	$\sigma(R_{P_i})$	$\sigma(\epsilon_{P_i})$
P_1	15%	0.5	20%	?
P_2	?	2	?	0
P_3	25%	?	20%	?
P_4	35%	1.5	?	10%

Exercice 2: [8pts]

On considère le modèle à facteurs $R = A + BF + \epsilon$ avec

$A = \begin{pmatrix} 1\% \\ 2\% \\ 3\% \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ and $\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix}$.

On suppose que F et ϵ sont indépendants, que $E[F] = 0$, $E[\epsilon] = 0$ et que $\mathbf{Var}(F) = \Sigma_F$ est inversible.

1. **[1pt]** Montrer que le modèle est un modèle APT et calculer les valeurs de λ_0, λ_1, λ_2. A partir de maintenant on notera $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

2. **[1pt]** Dans le modèle réduit $R = A + BF$ trouver l'expression des allocations des portefeuilles d'investissement sans risque et calculer le rendement de ces portefeuilles.

3. **[1pt]** Dans le modèle réduit $R = A + BF$ montrer qu'il n'y a pas de portefeuille auto-financé sans rique.

4. Dans le modèle à facteurs, soit $R(\pi)$ le rendement du portefeuille d'allocation π et β^* la solution de

$$\arg\min_{\beta \in \mathbb{R}^2} \mathbf{Var}(R(\pi) - \beta' F)$$

(a) **[1pt]** exprimer β^* en fonction de $\mathbf{Cov}(F, R(\pi))$ et Σ_F

(b) **[1pt]** exprimer β^* en fonction de B et π et donner l'expression de $\mathbf{Var}(R(\pi) - \beta^{*\prime}F)$ en fonction de π et $\mathbf{Var}(\epsilon)$

(c) **[0.5pt]** montrer que $\mathbf{E}(R(\pi)) = \lambda_0 + \beta^{*\prime}\lambda$ si π est un portefeuile d'investissement

(d) **[0.5pt]** montrer que $\mathbf{E}(R(\pi)) = \beta^{*\prime}\lambda$ si π est un portefeuile auto-financé

5. **[2pt]** Trouver un exemple numérique de matrice C et de vecteur A tel que

$$R = A + CF + \epsilon$$

soit un modèle APT tel que dans le modèle réduit $R = A+CF$ il n'y ait pas de portefeuille d'investissement sans risque mais des portefeuilles auto-financés sans risque.

Exercice 3.[6pts]

On considère une économie avec d actifs risqués de vecteur de rendements R et un actif sans risque r_0. On suppose que $\mathbf{Var}(R) = \Sigma$ est inversible. On rappelle que l'allocation du Portefeuille Tangent est

$$\frac{1}{b - r_0 a}\Sigma^{-1}(M - r_0 1_d)$$

1. **[2pts]** (Most Diversified Portfolio) Montrer qu'il est possible de construire des portefeuilles dont le rendement R_D a une corrélation identique avec les d actifs risqués, càd tels que $\exists c \in \mathbb{R}, \forall i \in [\![1, d]\!],\ \rho(R_i, R_D) = c.$

2. **[2pts]** (Portefeuille de Marché, Portefeuille Tangent) Montrer que à Σ donné il existe une unique valeur de M pour laquelle le Portefeuille Tangent est le Portefeuille de Marché.

3. **[2pts]** (Most Diversified Portfolio, Portefeuille Tangent) Montrer que le Portefeuille Tangent a la même corrélation avec les d actifs risqués si et seulement si les d actifs risqués ont tous le même ratio de Sharpe.