

## Master M1 - Mido: 15 Janvier 2018

Examen: Gestion de Portefeuille <sup>1</sup>: 2h

**Notations:** On considère  $d$  actifs risqués  $S^1, S^2, \dots, S^d$ , de rendements sur  $[0, T]$  vérifiant  $R^i = m^i + \epsilon^i$ . on note :

$$R = M + \epsilon \text{ avec } R = \begin{pmatrix} R^1 \\ \vdots \\ R^d \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} m^1 \\ \vdots \\ m^d \end{pmatrix} \text{ et } \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \vdots \\ \epsilon^d \end{pmatrix}$$

où  $M$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\epsilon$  est un vecteur aléatoire d'espérance nulle et de matrice de variance-covariance  $\Sigma$  inversible.

On note:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \vdots \\ \pi^d \end{pmatrix} \text{ une allocation, à l'instant } 0, \text{ dans les actifs risqués } S^i,$$

- $R_\pi$  le rendement du portefeuille  $\pi$  sur  $[0, T]$
- $1_d$  le vecteur de  $\mathbb{R}^d$  dont toutes les composantes valent 1
- $a = 1'_d \Sigma^{-1} 1_d$  et  $b = 1'_d \Sigma^{-1} M$
- $r^0$  le taux sans risque de l'actif sans risque  $S^0$  et on suppose que  $r^0 \neq \frac{b}{a}$

### Exercice 1: [4pts]

Donner sans justification les réponses aux questions suivantes :

[0.25pt] 1) Exprimer  $Cov(R_{\pi_1}, R_{\pi_2})$  comme fonction de  $\pi_1, \pi_2$  et  $\Sigma$

[0.25pt] 2) Si  $P$  est un portefeuille d'investissement et  $\pi_P$  son allocation dans les actifs risqués, exprimer son allocation  $\pi_P^0$  dans l'actif sans risque comme une fonction de  $\pi_P$  et  $1_d$

[0.25pt] 3) Si  $Q$  est un portefeuille auto-finançant et  $\pi_Q$  son allocation dans les actifs risqués, exprimer son allocation  $\pi_Q^0$  dans l'actif sans risque comme une fonction de  $\pi_Q$  et  $1_d$

[0.25pt] 4) Quelle est la particularité du portefeuille  $\pi_a = \frac{1}{a} \Sigma^{-1} 1_d$  ?

[0.25pt] a) exprimer  $E(R_{\pi_a})$  comme une fonction de  $a$  et  $b$

[0.25pt] b) exprimer  $Var(R_{\pi_a})$  comme une fonction  $a$  et  $b$

5) Si un portefeuille d'investissement est du type  $\pi = \alpha \Sigma^{-1} (M - r^0 1_d)$

[0.25pt] a) quelle est la valeur de  $\alpha$  ?

[0.25pt] b) quel est le nom de ce portefeuille d'investissement ?

[1pt] 6) Le théorème de la Security Market Line prouve que pour tout portefeuille d'investissement  $P$ :  $R_P - r^0 = Cov(R_P, R_T)(R_T - r^0) + \epsilon_P$  en déduire une équation similaire vérifiée par le rendement  $R_Q$  d'un portefeuille auto-finançant

<sup>1</sup>Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

[0.5pt] 7) Dans un modèle à facteurs  $R = A + BF + \mathcal{E}$  avec  $Cov(F, \mathcal{E}) = 0$  quelle est l'expression de  $Var(R)$  en fonction de  $B$ ,  $Var(F)$  et  $Var(\mathcal{E})$  ?

[0.5pt] 8) Si  $\Sigma$  est une matrice de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  symétrique définie positive à valeurs propres  $(\lambda^i)_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$  et avec comme base de vecteurs propres orthonormés correspondante  $(u_i)_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$  exprimer  $\Sigma$  comme fonction des  $\lambda^i$  et  $u_i$

**Exercice 2: [3pts]**

On considère la table suivante:

Portefeuille	E(Rendement)	$\beta_T(P_i)$	$\sigma(R_{P_i})$	$\sigma(\epsilon_{P_i})$
$P_1$	7%	0.5	5%	0%
$P_2$	?	1	10%	10%
$P_3$	16%	2	20%	0%
$P_4$	6%	?	?	10%

On rappelle l'équation de la Security Market Line:

$$R_{P_i} - r_0 = \beta_T(P_i)(R_T - r_0) + \epsilon_{P_i}$$

[1.50pt] 1) Dédurre de la table  $r_0$ ,  $m_T$  et  $\sigma_T$

[1.50pt] 2) Compléter la table

**Exercice 3: [3pts]**

On considère le modèle à facteurs  $R = \lambda^0 1_3 + BF + \mathcal{E}$  avec,

$$R = \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \\ R^3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \epsilon^2 \\ \epsilon^3 \end{pmatrix}$$

avec les hypothèses:  $\mathbf{Var}(F)$  inversible,  $\mathbf{E}(\mathcal{E}) = 0$  et  $\mathbf{Cov}(F, \mathcal{E}) = 0$

[1pt] 1) Trouver un portefeuille auto-finançant  $\pi_S$  tel que  $\mathbf{Cov}(R_{\pi_S}, F) = 0$  et calculer pour ce portefeuille  $E(R_{\pi_S})$

[1pt] 2) Est-il possible dans ce modèle de trouver un portefeuille d'investissement  $\pi$  tel que  $\mathbf{Cov}(R_{\pi}, F) = 0$  ?

[1pt] 3) On suppose que  $\mathbf{Var}(F) = 0.01 \times Id_{\mathbb{R}^2}$  et que  $\mathbf{Var}(\mathcal{E}) = 0.01 \times Id_{\mathbb{R}^3}$  calculer la corrélation entre  $R^1$  et  $R^2$

**Problème: [10pts]**

On suppose que  $E(R)$  n'est pas colinéaire à  $1_d$  et pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixé, on appelle  $(P_\lambda)$  le problème de trouver  $(B, f)$  solution de

$$(P_\lambda) \begin{cases} E(R - \lambda 1_d - B(f - \lambda)) = 0 \\ Cov(R - \lambda 1_d - B(f - \lambda), f) = 0 \end{cases}$$

où  $B$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^d$  et  $f$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et non constante.

**[2pt]** 1) Montrer que:  
 $(B, f)$  solution de  $(P_\lambda) \implies (E(f) \neq \lambda \text{ et } \frac{Cov(R, f)}{Var(f)}(E(f) - \lambda) = M - \lambda 1_d)$

**le résultat de la question 1) peut être admis pour le reste du problème.**

Pour  $x \in \mathbb{R}^d$  on note  $f_x = x'R$  (si  $\pi$  est un portefeuille alors  $f_\pi = \pi'R = R_\pi$  et on peut utiliser les notations indifféremment).

**[1pt]** 2) Montrer que:  
 $M - \lambda 1_d = \frac{Cov(R, f_x)}{Var(f_x)}(E(f_x) - \lambda) \implies x \text{ et } \Sigma^{-1}(M - \lambda 1_d)$  sont colinéaires

A partir de maintenant et jusqu'à la fin on suppose que  $\lambda \neq \frac{b}{a}$

3)

**[0.5pt]** a) si  $\pi_\lambda$  est un portefeuille d'investissement sans allocation à l'actif sans risque et colinéaire à  $\Sigma^{-1}(M - \lambda 1_d)$ , montrer que  $\pi_\lambda = \frac{\Sigma^{-1}(M - \lambda 1_d)}{b - \lambda a}$

**[1pt]** b) exprimer  $E(R_{\pi_\lambda}) - \lambda$  comme fonction de:  $a, b, \lambda, M, 1_d$  et  $\|\cdot\|_{\Sigma^{-1}}$

**[0.5pt]** c) exprimer  $Var(R_{\pi_\lambda})$  comme fonction de:  $a, b, \lambda, M, 1_d$  et  $\|\cdot\|_{\Sigma^{-1}}$

**[1pt]** d) montrer que  $\frac{Cov(R, R_{\pi_\lambda})}{Var(R_{\pi_\lambda})}(E(R_{\pi_\lambda}) - \lambda) = M - \lambda 1_d$

**[0.5pt]** e) si  $(B_\lambda, R_{\pi_\lambda})$  est une solution  $(P_\lambda)$  calculer  $B_\lambda$  comme une fonction de:  $a, b, \lambda, M, 1_d$  et  $\|\cdot\|_{\Sigma^{-1}}$

**[1pt]** f) vérifier que  $(B_\lambda, R_{\pi_\lambda})$  tel que défini par 3.a) et 3.e) est une solution de  $(P_\lambda)$

**[1pt]** 4) Montrer que si  $(B, f)$  est une solution de  $(P_\lambda)$  on peut écrire:

$$R = \lambda 1_d + B(f - \lambda) + \mathcal{E} \text{ avec}$$

$$E(\mathcal{E}) = 0, Cov(f, \mathcal{E}) = 0 \text{ et } Trace(Var(\mathcal{E})) < Trace(Var(R))$$

**[0.5pt]** 5) Montrer (en utilisant les résultat précédents) que pour tout portefeuille d'investissement de rendement  $R_Q$  on a :

$$E(R_Q) - \lambda = \frac{Cov(R_Q, R_{\pi_\lambda})}{Var(R_{\pi_\lambda})}(E(R_{\pi_\lambda}) - \lambda)$$

**[0.5pt]** 6) Montrer (en utilisant les résultat précédents) que pour tout portefeuille auto-finançant de rendement  $R_S$  on a :

$$E(R_S) = \frac{Cov(R_S, R_{\pi_\lambda})}{Var(R_{\pi_\lambda})}(E(R_{\pi_\lambda}) - \lambda)$$

**[0.5pt]** 7) Dire (sans démonstration) quelle est l'interprétation géométrique pour le portefeuille  $\pi_\lambda$