Master M1 - Mido: 2 Novembre 2017
Partiel: Gestion de Portefeuille [1]: Durée 2h

Notations: On considère d actifs risqués S^1, S^2, $...S^d$, dont les rendements sur $[0,T]$ vérifient $R^i = m^i + \epsilon^i$. On note sous forme vectorielle:

$$R = M + \epsilon \text{ avec } R = \begin{pmatrix} R^1 \\ \vdots \\ R^d \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} m^1 \\ \vdots \\ m^d \end{pmatrix} \text{ et } \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \vdots \\ \epsilon^d \end{pmatrix}$$

où M est un vecteur de $\mathbf{R}^d$, ϵ est un vecteur aléatoire d'espérance nulle et de matrice de variance-covariance Σ inversible. On note:

$\pi = \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \vdots \\ \pi^d \end{pmatrix}$ la proportion à l'instant 0 des investissements dans les actifs risqués S^i,

R^π le rendement du portefeuille sur $[0,T]$, m^π son espérance et σ^π son écart type.

Le vecteur de $\mathbf{R}^d$ de composantes toutes égales à 1 est noté 1_d.
Pour toute fonction $L()$ on note $\frac{\partial L}{\partial \pi}$ le vecteur ligne $[\frac{\partial L}{\partial \pi^1}, \cdots, \frac{\partial L}{\partial \pi^d}]$

On note $a = 1_d' \Sigma^{-1} 1_d$ et $b = 1_d' \Sigma^{-1} M$

Exercice 1 : [4pts]
Donner sans justification les réponses aux questions suivantes :
1) **[0.25pt]** Exprimer $E[R^\pi]$ en fonction de π et de M
$\pi' M$
2) **[0.25pt]** Exprimer $Var[R^\pi]$ en fonction de π et de Σ
$\pi' \Sigma \pi$
3) **[0.50pt]** Exprimer $Cov(R^{\pi_1}, R^{\pi_2})$ en fonction de π_1, π_2 et de Σ
$\pi_1' \Sigma \pi_2$

Si X et Y sont deux vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^k$ et $\mathbf{R}^l$, A une matrice de $\mathbf{R}^{m \times k}$ et B une matrice de $\mathbf{R}^{n \times l}$
4) **[0.50pt]** Exprimer $Cov(X,Y)$ en fonction de $E[XY']$, $E[X'Y]$, $E[X]$ et $E[Y]$
$E[XY'] - E[X]E[Y]'$
5) **[0.50pt]** Exprimer $Cov(AX, BY)$ en fonction de A, B et $Cov(X,Y)$
$ACov(X,Y)B'$
5) **[0.50pt]** Exprimer $Cov(X,Y)$ en fonction de $Cov(Y,X)$
$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)'$

[1] Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

6) **[0.50pt]** Exprimer $\frac{\partial f}{\partial \pi}$ pour $f(\pi) = \pi'\Sigma\pi + \alpha_1\pi' M + \alpha_2$

$\frac{\partial f}{\partial \pi} = 2\pi'\Sigma + \alpha_1 M'$

On considère une stratégie (x_0, π)
7) **[0.25pt]** que vaut $1_d'\pi$ pour une stratégie d'investissement
1
8) **[0.25pt]** que vaut $1_d'\pi$ pour une stratégie auto-finançante
0
9) **[0.25pt]** que représente x_0 pour une stratégie d'investissement
la richesse initale
10)**[0.25pt]** que représente x_0 pour une stratégie auto-finançante
le notionnel

Exercice 2 : [6pts]
On suppose $M \neq 0$ et on note $\pi_M = \frac{1}{b}\Sigma^{-1}M$ et R_M le rendement du portefeuille (x_0, π_M)
1) **[0.25pt]** Montrer que π_M est une allocation de portefeuille d'investissement
$1_d'\pi_M = \frac{b}{b} = 1$ C.Q.F.D

On note (x_0, π_P) un portefeuille d'investissement quelconque dont le rendement sera noté R_P
2) **[0.25pt]** Montrer que : $Cov(R_P, R_M) = 0 \Longrightarrow E[R_P] = 0$

$Cov(R_P, R_M) = \pi_P'\Sigma\frac{1}{b}\Sigma^{-1}M = \frac{1}{b}\pi_P' M = \frac{1}{b}E[R_P]$ C.Q.F.D

On considère le problème $\inf\limits_{\alpha \in \mathbf{R}} Var(R_P - \alpha R_M)$
3) **[0.25pt]** Montrer que l'inf est atteint pour une valeur unique de α notée $\alpha_M(P)$

$Var(R_P - \alpha R_M) = Var(R_P) + \alpha^2 Var(R_M) - 2\alpha Cov(R_P, R_M)$ fonction quadratique de α avec le terme en α^2 positif C.Q.F.D

4) **[0.25pt]** Donner l'expression de $\alpha_M(P)$ en fonction de $Cov(R_M, R_P)$, $Var(R_M)$, $Var(R_P)$

la dérivée s'annule pour $2\alpha Var(R_M) - 2Cov(R_P, R_M) = 0$
donc $\alpha_M(P) = \frac{Cov(R_P, R_M)}{Var(R_M)}$

5) **[1pt]** Calculer la valeur numérique de $E(R_P - \alpha_M(P)R_M)$

$E(R_P - \alpha_M(P)R_M) = \Pi_P' M - \frac{Cov(R_M, R_P)}{Var(R_M)}E(R_M)$
$= \Pi_P' M - \frac{1}{b}\Pi_P'\Sigma\Sigma^{-1}M\frac{E(R_M)}{Var(R_M)} = \Pi_P' M - \frac{1}{b}\Pi_P' M\frac{E(R_M)}{Var(R_M)}$
or $E[R_M] = \frac{1}{b}M'\Sigma^{-1}M$ and $Var[R_M] = \frac{1}{b^2}M'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}M = \frac{1}{b}E[R_M]$

donc $E(R_P - \alpha_M(P)R_M) = 0$

6) **[1pt]** Exprimer $Var(R_P - \alpha_M(P)R_M)$ en fonction de $Var(R_M)$ et de la corrélation entre R_P et R_M notée $\rho_{P,M}$

$Var(R_P - \alpha_M(P)R_M) = \sigma_P^2 - 2\alpha_M(P)Cov(R_P, R_M) + \alpha_M(P)^2\sigma_M^2$
$= \sigma_P^2 - 2\frac{Cov(R_P,R_M)^2}{Var(R_M)} + \frac{Cov(R_P,R_M)^2}{Var(R_M)^2}\sigma_M^2$
$= \sigma_P^2 - 2\rho_{P,M}^2\frac{\sigma_P^2\sigma_M^2}{\sigma_M^2} + \rho_{P,M}^2\frac{\sigma_P^2\sigma_M^2}{\sigma_M^4}\sigma_M^2$
$= (1-\rho_{P,M}^2)Var(R_P)$

7) **[0.50pt]** Montrer à partir de ce qui précède que pour tout portefeuille d'investissement P de rendement R_P on peut écrire :
$R_P = \alpha_{P,M}R_M + \epsilon_{P,M}$ avec $\alpha_{P,M} \in \mathbf{R}$ et
i) $E(\epsilon_{P,M}) = 0$
ii) $Var(\epsilon_{P,M}) \leq Var(R_P)$

Si on prend $\alpha_{P,M} = \alpha_M(P)$ tel que defini précédemment alors on a bien $E(\epsilon_{P,M}) = 0$ puisque $E[R_P - \alpha_M(P)R_M] = 0$ d'après 5) et d'autre part d'après 6) $Var(\epsilon_{P,M}) = Var(R_P - \alpha_M(P)R_M) = (1-\rho_{P,M})^2Var(R_P) \leq Var(R_P)$ C.Q.F.D

8) **[1.5pt]** Démontrer que si un portefeuille d'investissement (x_0, π_Q) vérifie:
$Cov(R_P, R_Q) = 0 \Longrightarrow E[R_P] = 0,$
alors $\pi_Q = \pi_M$

Si R_Q possède la propriété alors cela entraine que :
$\{x \in \mathbf{R}^d, x'\Sigma\pi_Q = 0\} \subset \{x \in \mathbf{R}^d, x'M = 0\}$
$\Longrightarrow Vect(\Sigma\pi_Q)^\perp \subset Vect(M)^\perp$
$\Longrightarrow Vect(M) \subset Vect(\Sigma\pi_Q)$
$\Longrightarrow \exists\lambda \in \mathbf{R}, M = \lambda\Sigma\pi_Q$ (et $\lambda \neq 0$ puisque $M \neq 0$)
$\Longrightarrow \pi_Q = \frac{1}{\lambda}\Sigma^{-1}M$

9) **[1pt]** Quels commentaires vous inspirent les résultat 7) et 8) en terme de "rémunération du risque" pour un portefeuille d'investissement.

seul le risque corrélé à R_M est remunéré et R_M est défini de façon unique par rapport à cette propriété

Exercice 3 : [5pts]
On note R_Z le rendement d'un actif appartenant ou non à l'univers des portefeuilles constructibles à partir des actifs risqués $S^1, S^2, \cdots S^d$. On cherche à résoudre

$$\begin{cases} \inf_{\pi\in\mathbf{R}^d} \mathbf{Var}(R_Z - \pi'R) \\ \pi'1_d = 1 \end{cases}$$

1) **[1.00pt]** Ecrire le Lagrangien $L(\pi, \lambda)$

$L(\pi, \lambda) = \mathbf{Var}(R_Z) - 2Cov(R_Z, \pi' R) + \mathbf{Var}(\pi' R) - \lambda(\pi' 1_d - 1)$
$= \mathbf{Var}(R_Z) - 2Cov(R_Z, R)\pi + \pi'\Sigma\pi - \lambda(\pi' 1_d - 1)$
2) **[0.50pt]** Calculer $\frac{\partial L}{\partial \pi}$
$\frac{\partial L}{\partial \pi} = -2Cov(R_Z, R) + 2\pi'\Sigma - \lambda 1_d'$
3) **[0.50pt]** Justifier que l'inf est atteint pour π solution de $\frac{\partial L}{\partial \pi} = 0$
Σ est définie positive donc résultat classique pour une fonction strictement convexe

4) **[2.00pt]** Montrer que la solution du problème s'écrit :
$\pi = \pi_a + \Sigma^{-1}[U_Z - \pi_a' U_Z 1_d]$, que valent U_Z et π_a ?
$\frac{\partial L}{\partial \pi} = 0 \Longrightarrow -2Cov(R_Z, R) + 2\pi'\Sigma - \lambda 1_d' = 0$
$\Longrightarrow \Sigma'\pi = Cov(R, R_Z) + \frac{1}{2}\lambda 1_d$
$\Longrightarrow \pi = \Sigma^{-1}Cov(R, R_Z) + \frac{1}{2}\lambda\Sigma^{-1}1_d$
La contrainte donne $1_d'\Sigma^{-1}Cov(R, R_Z) + \frac{1}{2}\lambda 1_d'\Sigma^{-1}1_d = 1$
donc $\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}(\Sigma^{-1}1_d)'Cov(R, R_Z)$
posons $\pi_a = \frac{1}{a}\Sigma^{-1}1_d$ et $U_Z = Cov(R, R_Z)$
on a donc $\pi = \Sigma^{-1}U_Z + (\frac{1}{a} - \pi_a' U_Z)\Sigma^{-1}1_d = \pi_a + \Sigma^{-1}[U_Z - \pi_a' U_Z 1_d]$

5) **[1.00pt]** A quelle situation correspond le cas $U_Z = 0$ et comment dans ce cas peut-on retouver facilement la solution du problème considéré ?

$U_Z = 0 \Longleftrightarrow R_Z$ n'est corrélé à aucun R_i
dans ce cas on a également $Cov(R_Z, R_P) = 0$ pour tout portefeuille d'investissement R_P et donc $\mathbf{Var}(R_Z - R_P) = \mathbf{Var}(R_Z) + \mathbf{Var}(R_P)$ et donc le minimum est atteint pour $\mathbf{Var}(R_P)$ minimum et donc pour le portefeuille π_a d'où la solution $\pi = \pi_a$ que l'on obtient en 4) en remplaçant U_Z par zéro.

Exercice 4 : [5pts]
On rappelle que si on note $\mathcal{P}$ les portefeuilles d'investissements constructibles alors $\{(\sigma_\pi, m_\pi)', \pi \in \mathcal{P}\}$ est délimité par l'ensemble $\{(\sigma_\pi, m_\pi)', \pi \in \mathcal{F}\}$ où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des portfeuilles d'investissements du type $\frac{1}{a}\Sigma^{-1}1_d + \lambda\Sigma^{-1}(M - \frac{b}{a}1_d)$ où $\lambda \in \mathbf{R}$
1) **[1pt]** Montrer que : $(\alpha \in \mathbf{R}$, $\pi_1 \in \mathcal{F}$ et $\pi_2 \in \mathcal{F}) \Longrightarrow \alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2 \in \mathcal{F}$
$\alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2$
$= \alpha[\frac{1}{a}\Sigma^{-1}1_d + \lambda_1\Sigma^{-1}(M - \frac{b}{a}1_d)] + (1-\alpha)[\frac{1}{a}\Sigma^{-1}1_d + \lambda_2\Sigma^{-1}(M - \frac{b}{a}1_d)]$
$= \frac{1}{a}\Sigma^{-1}1_d + (\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)\Sigma^{-1}(M - \frac{b}{a}1_d)$ C.Q.F.D .
2) **[1pt]** Montrer que : $(\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\pi_1 \notin \mathcal{F}$ et $\pi_2 \in \mathcal{F}) \Longrightarrow \alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2 \notin \mathcal{F}$

par l'absurde
$\alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2 = \pi \in \mathcal{F} \Longrightarrow \pi_1 = \frac{1}{\alpha}\pi - \frac{1-\alpha}{\alpha}\pi_2$, or
$\frac{1}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha} = 1$ et π et $\pi_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow \pi_1 \in \mathcal{F}$ d'après 1)et donc on aboutit à une contradiction

On suppose dans tout ce qui suit que $M \neq \frac{b}{a}1_d$, que π_P, $\pi_Q \in \mathcal{F}$ avec

$m_P \neq m_Q$ et que $\pi_R \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$ et $m_R \neq m_P$.
3) **[1pt]** Montrer que : $\forall \pi \in \mathcal{F}\ \exists \alpha \in \mathbf{R}$, $\pi = \alpha\pi_P + (1-\alpha)\pi_Q$

il suffit de prendre α tel que $\lambda_\pi = \alpha\lambda_{\pi_P} + (1-\alpha)\lambda_{\pi_Q}$

4) **[2pt]** Montrer que : $\forall(\sigma, m)'$ à droite de $\mathcal{F}$ il existe α_1, $\alpha_2 \in \mathbf{R}$, tel que le portefeuille d'allocation $\alpha_1\pi_P + \alpha_2\pi_Q + (1-\alpha_1-\alpha_2)\pi_R$ a pour espérance m et écart type de rendement σ.

soit α tel que $\alpha m_P + (1-\alpha)m_Q = m$ et Z_1 le portefeuille d'investissement d'allocation $\alpha\pi_P + (1-\alpha)\pi_Q$
soit β tel que $\beta m_P + (1-\beta)m_R = m$ et Z_2 le portefeuille d'investissement d'allocation $\beta\pi_P + (1-\beta)\pi_R$
Si on considère maintenant l'ensemble des portefeuilles d'investissements $\{\gamma\pi_{Z_2} + (1-\gamma)\pi_{Z_1}, \gamma \in \mathbf{R}\}$ alors pour tout portefeuille de rendement R_γ de cet ensemble on a $E[R_\gamma] = m$ et $Var(R_\gamma) = \|\gamma(\pi_{Z_2} - \pi_{Z_1}) + \pi_{Z_1}\|_\Sigma$ qui prend toutes les valeurs entre $\|\pi_{Z_1}\|_\Sigma = Var[R_{Z_1}]$ (pour $\gamma = 0$) et $+\infty$. On peut donc trouver γ^* tel que $Var(R_{\gamma^*}) = \sigma^2$ et donc le portefeuille d'investissement solution est $(1-\gamma^*)[\alpha\pi_P + (1-\alpha)\pi_Q] + \gamma^*[\beta\pi_P + (1-\beta)\pi_R]$ C.Q.F.D