**Master M1 - Mido: 2 Novembre 2017**
Partiel: Gestion de Portefeuille [1]: Durée 2h

**Notations:** On considère $d$ actifs risqués $S^1$, $S^2$, ...$S^d$, dont les rendements sur $[0,T]$ vérifient $R^i = m^i + \epsilon^i$. On note sous forme vectorielle:

$$R = M + \epsilon \text{ avec } R = \begin{pmatrix} R^1 \\ \vdots \\ R^d \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} m^1 \\ \vdots \\ m^d \end{pmatrix} \text{ et } \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \vdots \\ \epsilon^d \end{pmatrix}$$

où $M$ est un vecteur de $\mathbf{R}^d$, $\epsilon$ est un vecteur aléatoire d'espérance nulle et de matrice de variance-covariance $\Sigma$ inversible. On note:

$\pi = \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \vdots \\ \pi^d \end{pmatrix}$ la proportion à l'instant 0 des investissements dans les actifs risqués $S^i$,

$R^\pi$ le rendement du portefeuille sur $[0,T]$, $m^\pi$ son espérance et $\sigma^\pi$ son écart type.

Le vecteur de $\mathbf{R}^d$ de composantes toutes égales à 1 est noté $1_d$.
Pour toute fonction $L(\pi)$ on note $\frac{\partial L}{\partial \pi}$ le vecteur ligne $[\frac{\partial L}{\partial \pi^1}, \cdots, \frac{\partial L}{\partial \pi^d}]$
On note $a = 1_d' \Sigma^{-1} 1_d$ et $b = 1_d' \Sigma^{-1} M$

**Exercice 1 : [4pts]**
Donner sans justification les réponses aux questions suivantes :
1)[**0.25pt**] Exprimer $E[R^\pi]$ en fonction de $\pi$ et de $M$
2)[**0.25pt**] Exprimer $Var[R^\pi]$ en fonction de $\pi$ et de $\Sigma$
3)[**0.50pt**] Exprimer $Cov(R^{\pi_1}, R^{\pi_2})$ en fonction de $\pi_1$, $\pi_2$ et de $\Sigma$

Si $X$ et $Y$ sont deux vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^k$ et $\mathbf{R}^l$, $A$ une matrice de $\mathbf{R}^{m\times k}$ et $B$ une matrice de $\mathbf{R}^{n\times l}$
4)[**0.50pt**] Exprimer $Cov(X,Y)$ en fonction de $E[XY']$, $E[X'Y]$, $E[X]$ et $E[Y]$
5)[**0.50pt**] Exprimer $Cov(AX, BY)$ en fonction de $A$, $B$ et $Cov(X,Y)$
6)[**0.50pt**] Exprimer $Cov(X,Y)$ en fonction de $Cov(Y,X)$

7)[**0.50pt**] Exprimer $\frac{\partial f}{\partial \pi}$ pour $f(\pi) = \pi'\Sigma\pi + \alpha_1 \pi' M + \alpha_2$

On considère une stratégie $(x_0, \pi)$
8)[**0.25pt**] que vaut $1_d'\pi$ pour une stratégie d'investissement
9)[**0.25pt**] que vaut $1_d'\pi$ pour une stratégie auto-finançante
10)[**0.25pt**] que représente $x_0$ pour une stratégie d'investissement

[1]Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

11)[**0.25pt**] que représente $x_0$ pour une stratégie auto-finançante

**Exercice 2 : [6pts]**

On suppose $M \neq 0$ et on note $\pi_M = \frac{1}{b}\Sigma^{-1}M$ et $R_M$ le rendement du portefeuille $(x_0, \pi_M)$

1)[**0.25pt**] Montrer que $\pi_M$ est une allocation de portefeuille d'investissement

On note $(x_0, \pi_P)$ un portefeuille d'investissement quelconque dont le rendement sera noté $R_P$

2)[**0.25pt**] Montrer que : $Cov(R_P, R_M) = 0 \Longrightarrow E[R_P] = 0$

On considère le problème $\inf\limits_{\alpha \in \mathbf{R}} Var(R_P - \alpha R_M)$

3)[**0.25pt**] Montrer que l'inf est atteint pour une valeur unique de $\alpha$ notée $\alpha_M(P)$

4)[**0.25pt**] Donner l'expression de $\alpha_M(P)$ en fonction de $Cov(R_M, R_P)$, $Var(R_M)$ et $Var(R_P)$

5)[**1pt**] Calculer la valeur numérique de $E(R_P - \alpha_M(P)R_M)$

6)[**1pt**] Exprimer $Var(R_P - \alpha_M(P)R_M)$ en fonction de $Var(R_P)$ et de la corrélation entre $R_P$ et $R_M$ notée $\rho_{P,M}$

7)[**0.50pt**] Montrer à partir de ce qui précède que pour tout portefeuille d'investissement $P$ de rendement $R_P$ on peut écrire :

$R_P = \alpha_{P,M} R_M + \epsilon_{P,M}$ avec $\alpha_{P,M} \in \mathbf{R}$ et

i) $E(\epsilon_{P,M}) = 0$

ii) $Var(\epsilon_{P,M}) \leq Var(R_P)$

8)[**1.5pt**] Démontrer que si un portefeuille d'investissement $(x_0, \pi_Q)$ vérifie:

$Cov(R_P, R_Q) = 0 \Longrightarrow E[R_P] = 0$,

alors $\pi_Q = \pi_M$

9)[**1pt**] Quels commentaires vous inspirent les résultat 7) et 8) en terme de "rémunération du risque" pour un portefeuille d'investissement.

**Exercice 3 : [5pts]**

On note $R_Z$ le rendement d'un actif appartenant ou non à l'univers des portefeuilles constructibles à partir des actifs risqués $S^1, S^2, \cdots S^d$. On cherche à résoudre

$$\begin{cases} \inf\limits_{\pi \in \mathbf{R}^d} \mathbf{Var}(R_Z - \pi' R) \\ \qquad \pi' 1_d = 1 \end{cases}$$

1)[**1.00pt**] Ecrire le Lagrangien $L(\pi, \lambda)$

2)[**0.50pt**] Calculer $\frac{\partial L}{\partial \pi}$

3)[**0.50pt**] Justifier que l'inf est atteint pour $\pi$ solution de $\frac{\partial L}{\partial \pi} = 0$

4)[**2.00pt**] Montrer que la solution du problème s'écrit :

$\pi = \pi_a + \Sigma^{-1}[U_Z - \pi_a' U_Z 1_d]$ , que valent $U_Z$ et $\pi_a$ ?

5)[**1.00pt**] A quelle situation correspond le cas $U_Z = 0$ et comment dans ce cas peut-on retouver facilement la solution du problème considéré ?

**Exercice 4 : [5pts]**
On rappelle que si on note $\mathcal{P}$ les portefeuilles d'investissements constructibles alors $\{(\sigma_\pi, m_\pi)', \pi \in \mathcal{P}\}$ est délimité par l'ensemble $\{(\sigma_\pi, m_\pi)', \pi \in \mathcal{F}\}$ où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des portfeuilles d'investissements du type $\frac{1}{a}\Sigma^{-1}1_d + \lambda\Sigma^{-1}(M - \frac{b}{a}1_d)$ où $\lambda \in \mathbf{R}$
1)**[1pt]** Montrer que : $(\alpha \in \mathbf{R}, \pi_1 \in \mathcal{F}$ et $\pi_2 \in \mathcal{F}) \Longrightarrow \alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2 \in \mathcal{F}$
2)**[1pt]** Montrer que : $(\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \pi_1 \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$ et $\pi_2 \in \mathcal{F}) \Longrightarrow \alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2 \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$

On suppose dans tout ce qui suit que $M \neq \frac{b}{a}1_d$, que $\pi_P$, $\pi_Q \in \mathcal{F}$ avec $m_P \neq m_Q$ et que $\pi_R \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$ et $m_R \neq m_P$.
3)**[1pt]** Montrer que : $\forall \pi \in \mathcal{F}\ \exists \alpha \in \mathbf{R}$, $\pi = \alpha\pi_P + (1-\alpha)\pi_Q$
4)**[2pt]** Montrer que : $\forall (\sigma, m)'$ à droite de $\mathcal{F}$ il existe $\alpha_1$, $\alpha_2 \in \mathbf{R}$, tel que le portefeuille d'allocation $\alpha_1\pi_P + \alpha_2\pi_Q + (1-\alpha_1-\alpha_2)\pi_R$ a pour espérance $m$ et écart type de rendement $\sigma$.