Master M1 - Mido: 29th October 2018

Partiel: Gestion de Portefeuille [1]: 2h

Notations: On considère d actifs risqués S_1, S_2, ...S_d, dont les rendements sur $[0,T]$ satisfont $R^i = m^i + \epsilon^i$. On note vectoriellement :

$$R = M + \epsilon \text{ avec } R = \begin{pmatrix} R^1 \\ \vdots \\ R^d \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} m^1 \\ \vdots \\ m^d \end{pmatrix} \text{ et } \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \vdots \\ \epsilon^d \end{pmatrix}$$

où M est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, ϵ est un vecteur gaussien d'espérance zéro et de matrice de variance-covariance Σ inversible. On suppose également qu'il y a un actif sans risque S_0 de rendement r_0.

On note:

$\Pi = \begin{pmatrix} \pi^0 \\ \pi \end{pmatrix}$ une allocation d'actifs où π^0 est l'allocation dans l'actif sans risque et $\pi = \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \vdots \\ \pi^d \end{pmatrix}$ est l'allocation dans les actifs risqués S_i

R_Π désigne le rendement du portefeuille Π sur $[0,T]$. $E[R_\Pi]$ son espérance et $\sigma[R_\Pi]$ son écart type

1_d le vecteur de $\mathbb{R}^d$ dont toutes les composantes sont 1

e_i le vecteur de $\mathbb{R}^d$ dont toutes les composantes sont zéro exceptée la i^{eme} composante qui vaut 1

$a = 1_d'\Sigma^{-1}1_d$ et $b = 1_d'\Sigma^{-1}M$ et on suppose que $r_0 \neq \frac{b}{a}$ et $M \neq r_0 1_d$

On note Φ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ ainsi si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = P(Z \leq x)$ et Φ^{-1} la fonction réciproque de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. On note ϕ la dérivée de Φ, i.e la densité de la loi de Z.

Problème : [20pts] Mesures de Risque et Allocation de Capital

Pour tout vecteur $\pi \in \mathbb{R}^d$ on définit : $RM_\lambda(\pi) = -\pi'(M - r_0 1_d) + \lambda\sqrt{\pi'\Sigma\pi}$ qui est appelée la mesure de risque de Markowitz de paramètre λ pour l'exposition π. $RM_\lambda(\pi)$ peut-être interprétée comme le capital nécessaire pour une compagnie pour prendre les postions risquées π.

1)

[0.5pt] a) quelle est la relation entre π^0 and π pour un portefeuille d'investissement Π d'allocation risquée π ?

[0.5pt] b) exprimer en fonction de r_0, M et π l'espérance de rendement d'un portefeuille d'investissement Π d'allocation risquée π

[1] Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

[0.5pt] c) exprimer en fonction de π et Σ l'écart type du rendement d'un portefeuille d'investissement Π d'allocation risquée π

[0.5pt] d) montrer que pour tout $\pi \in \mathbb{R}^d$ $RM_\lambda(\pi) = -E[R_\Pi - r_0] + \lambda\sigma(R_\Pi)$ où Π est le portefeuille d'investissement d'allocation risquée π

Pour tout vecteur $\pi \in \mathbb{R}^d$ on définit la variable aléatoire $L_\pi = -\pi'(R - r_0 1_d)$ et pour $\alpha \in]0,1[$ on définit $VaR_\alpha(L_\pi)$ par: $VaR_\alpha(L_\pi) = \inf\{x, P(L_\pi \leq x) \geq \alpha\}$ que l'on appelle la "value at risk" pour l'exposition au risque π.

2)

[0.5pt] a) exprimer la loi de L_π en fonction de $E[R_\Pi]$, r_0 et $\sigma[R_\Pi]$ où Π est le portefeuille d'investissement d'allocation risquée π

[1pt] b) montrer que $P(L_\pi \leq VaR_\alpha(L_\pi)) = \alpha$

[1pt] c) exprimer $VAR_\alpha(L_\pi)$ en fonction de $E[R_\Pi], r_0, \sigma(R_\Pi), \alpha$ et Φ

[0.5pt] d) pour quelle valeur de $\lambda(\alpha)$ a t-on $\forall\pi \in \mathbb{R}^d, RM_{\lambda(\alpha)}(\pi) = VaR_\alpha(L_\pi)$

Pour tout $\pi \in \mathbb{R}^d$ on définit la quantité $E_\alpha(L_\pi) = E(L_\pi | L_\pi \geq VaR_\alpha(L_\pi))$ qui s'appelle l'"expected shortfall" pour l'allocation risquée π.

3)

[0.5pt] a) montrer que si $a \in \mathbb{R}$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $E(Z|Z \geq a) = \frac{\phi(a)}{1-\Phi(a)}$

[0.5pt] b) montrer que si $a \in \mathbb{R}$ et $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $E(X|X \geq a) = m + \frac{\phi(\frac{a-m}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{a-m}{\sigma})}\sigma$

[1.5pt] c) exprimer $E_\alpha(L_\pi)$ comme une fonction de $E[R_\Pi], r_0, \sigma[R_\Pi], \alpha, \phi$ et Φ

[0.5pt] d) pour quelle valeur de $\lambda(\alpha)$ a t'on $\forall\pi \in \mathbb{R}^d, RM_{\lambda(\alpha)}(\pi) = E_\alpha(L_\pi)$

Dans cette section on considère le vecteur ligne $\frac{\partial RM_\lambda}{\partial e_i}(\pi)$ qui représente la dérivée de $RM_\lambda(\pi)$ calculée au point π, dans la direction du vecteur e_i.

4)

[1pt] a) montrer que $\forall\pi \in \mathbb{R}^d, RM_\lambda(\pi) \leq \sum_{i=1}^{d} RM_\lambda(\pi^i e_i)$

[1pt] b) montrer que $\forall\pi \in \mathbb{R}^d, RM_\lambda(\pi) = \sum_{i=1}^{d} \pi^i \frac{\partial RM_\lambda}{\partial e_i}(\pi)$

[1pt] c) comment interprétez vous les résultats 4a) et 4b) en terme d'allocation de capital et d'effet de diversification ?

5)

[2pt] a) montrer que $\exists\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \inf\limits_{\pi\in\mathbb{R}^d} RM_\lambda(\pi) = -\infty \text{ si } \lambda < \lambda_0 \text{ et} \\ \inf\limits_{\pi\in\mathbb{R}^d} RM_\lambda(\pi) = 0 \text{ si } \lambda \geq \lambda_0 \end{cases}$$

et exprimer λ_0 en fonction de $M, r_0, 1_d$ et Σ

[0.5pt] b) montrer que si $\lambda > \lambda_0$ alors $\forall\pi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, RM_\lambda(\pi) > 0$

[0.5pt] c) montrer que $\exists\pi \in \mathbb{R}^d$ tel que $E(R_\Pi - r_0) > 0$

A partir de maintenant on considère que $\lambda > \lambda_0$ (tel que défini en 5a)) et pour tout $\pi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ on définit le "Return on Risk-Adjusted Capital" comme $RORAC_\lambda(\pi) = \frac{-E(L_\pi)}{RM_\lambda(\pi)}$ et on note $\mathcal{D} = \{\pi^* \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, RORAC_\lambda(\pi^*) = \sup_{\pi \in \mathbb{R}^d} RORAC_\lambda(\pi)\}$

6)

[1.5pt] a) montrer que $\pi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ maximise le $RORAC_\lambda(\pi)$ si et seulement si le portefeuille d'investissement Π d'allocation risquée π maximise le Ratio de Sharpe $\frac{E(R_\Pi - r_0)}{\sigma(R_\Pi)}$

[1.5pt] b) en utilisant a) déterminer $\mathcal{D}$ et $\frac{E(R_{\Pi^*} - r_0)}{\sigma(R_{\Pi^*})}$ pour $\pi^* \in \mathcal{D}$

[1pt] c) calculer $RORAC_\lambda(\pi^*)$ pour $\pi^* \in \mathcal{D}$ en fonction de λ and λ_0

[2pt] d) pour $\pi^* \in \mathcal{D}$ exprimer $\frac{-E[L_{\pi^{*i} e_i}]}{\pi^{*i} \frac{\partial RM_\lambda}{\partial e_i}(\pi^*)}$ lorsque $m^i \neq r_0$ et $\pi^{*i} \neq 0$ en fonction de λ et λ_0.