Master M1 - Mido 2015-2016

Examen de Rattrapage: Gestion de Portefeuille [1]: Durée 2h

[5 points] **Exercice 1.**

1) Parmi les propriétés suivantes pour le Skew d'une variable aléatoire X lesquelles sont vraies:
a) $\forall c \in \mathbf{R}$ $Skew(X+c) = Skew(X)$
b) $\forall c \in \mathbf{R}$ $Skew(X+c) = Skew(X) + c$
c) $Skew(-X) = -Skew(X)$

2) A quoi est égal le Kurtosis pour une variable aléatoire X:
a) $Kur[X] = E\left[(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)})^2 \right]$
b) $Kur[X] = E\left[\left(\frac{X-E(X)}{var(X)} \right)^4 \right]$
c) ni a ni b

3) Dans le test de Bera Jarque quelle est la loi de la statistique obtenue sous l'hypothèse de normalité:
a)une loi de type student
b)une loi de type normale
c)une loi de type chi-deux
d) ni a ni b ni c

4) Cochez les propositions qui sont vraies :
a)une fonction d'utilité croissante signifie une aversion au risque
b)une fonction d'utilité convexe signifie un appétit au risque
c)une fonction d'utilité affine signifie que l'on est neutre au risque

5) Parmi les assertions suivantes en théorie de l'utilité cochez celles qui sont vraies:
a) la prime de risque représente la différence entre l'espérance de revenus et l'équivalent certain
b) pour un investisseur qui est averse au risque la prime de risque est toujours positive ou nulle
c) si la fonction d'utilité est convexe la prime de risque est négative
d) la prime de risque est nulle pour un investisement de rendement certain

6) Parmi les hypothèses suivantes cochez celles qui sont utilisées dans le modèle de Markowitz ?
a) les rendements des actifs suivent tous des lois normales
b) les rendements de tous les actifs risqués sont positifs
c) Si un actif S^i a une volatilité de rendement plus élevé qu'un actif S^j alors

[1] Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

nécéssairement son espérance de rendement est plus élevée.

7) Quand on représente dans le plan des $\begin{pmatrix} \sigma \\ m \end{pmatrix}$ les portefeuilles d'investissements, cochez toutes les propositions qui sont vraies:
a)tous les portefeuilles d'investissements constructibles sont sur ou à droite d'une certaine frontière
b)tous les portefeuilles d'investissements constructibles sont sur ou à gauche d'une certaine frontière
c)tous les points de la frontière représentent des $\begin{pmatrix} \sigma \\ m \end{pmatrix}$ de portefeuilles d'investissements efficients
d)certains points de la frontière représentent des $\begin{pmatrix} \sigma \\ m \end{pmatrix}$ de portefeuilles d'investissements inefficients.

8) Quand on représente dans le plan $\begin{pmatrix} \sigma \\ m \end{pmatrix}$ tous les portefeuilles d'investissements constructibles, cochez toutes les propositions qui sont vraies:
a)tous les points de la frontière correspondent à différentes allocations entre deux portefeuilles fixes de la frontière
b)il suffit de connaitre deux portefeuilles distincts de la frontière pour pouvoir reconstruire toute la frontière
c)si on ne peut pas construire de portefeuille sans risque, le portefeuille de variance minimale a une allocation de 100% dans l'actif de variance de rendement minimale.

9) Cochez les réponses qui sont vraies:
Dans le plan $\begin{pmatrix} \sigma \\ m \end{pmatrix}$ la Capital Market Line:
a) se construit géométriquement comme une tangente
b) contient nécessairement le $\begin{pmatrix} \sigma \\ m \end{pmatrix}$ du portefeuille risqué de variance de rendement minimal
c) fait partie d'un cone qui contient tous les portefeuilles efficients et inefficients.

10) Dans le cas où il existe un actif sans risque, cochez les réponses qui sont vraies concernant la Capital Market Line: Pour tous portefeuilles efficients M et P.
a)$\frac{r_P - r_0}{\sigma_P} = \frac{r_M - r_0}{\sigma_M}$
b)$\frac{r_P - r_0}{\sigma_M} = \frac{r_M - r_0}{\sigma_P}$
c)$r_P = r_0 + (r_M - r_0)\sigma_P$
d)$correl(R_M, R_P) = 1$

[15pt] Problème. On considère d actifs risqués S^1, S^2, ...S^d. On rappelle que le rendement d'un actif S^i est défini par $r^i = \frac{S^i_T}{S^i_0} - 1$ et l'on suppose que les rendements r^i vérifient $r^i = m^i + \epsilon^i$. On note sous forme vectorielle:

$$R = M + \epsilon \text{ avec } R = \begin{pmatrix} r^1 \\ \vdots \\ r^d \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} m^1 \\ \vdots \\ m^d \end{pmatrix} \text{ et } \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \vdots \\ \epsilon^d \end{pmatrix} \text{ où}$$

M est un vecteur constant, ϵ est un vecteur aléatoire gaussien d'espérance nulle et de matrice de variance covariance inversible Σ.

On suppose également qu'il existe un actif sans risque dont le rendement est constant égal à r_0. On note (x_0, Π) où $\Pi = \begin{pmatrix} \pi^0 \\ \pi \end{pmatrix}$ et $\pi \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \vdots \\ \pi^d \end{pmatrix} \in R^d$, et $x_0 \neq 0$, un portefeuille pour lequel le montant de l'investissement dans l'actif sans risque est $x_0\pi^0$ et le montant des investissements dans chaque actif risqué S^i est $x_0\pi^i$.

[0.5pt]1) Montrer que $\forall \lambda \neq 0$ $(\lambda x_0, \frac{1}{\lambda}\Pi)$ et (x_0, Π) représentent le même portefeuille, c'est à dire ont tous les deux les même montants investis dans chacun des actifs.

[1pt]2) Montrer que si pour un portefeuille $(y_0, \tilde{\Pi})$ on a $\tilde{\pi}^0 + \sum\limits_{i=1}^{i=d} \tilde{\pi}^i \neq 0$ et $y_0 \neq 0$ alors on peut représenter ce portefeuille sous la forme canonique (x_0, Π) avec:

a) $\sum\limits_{i=1}^{i=d} \pi^i = 1$ et

b) x_0 qui est la valeur initiale du portefeuille

Par la suite on appelle un tel portefeuille un portefeuille d'investissement

[0.5pt]3) De quelle richesse initiale faut-il disposer pour construire un portefeuille (x_0, Π) tel que $\pi^0 + \sum\limits_{i=1}^{i=d} \pi^i = 0$?

Par la suite on appelera un tel portefeuille un portefeuille autofinancant.

On considère un portefeuille (x_0, Π) écrit sous forme canonique, c'est à dire $\pi^0 + \sum\limits_{i=1}^{i=d} \pi^i = 1$ dans le cas d'un portefeuille d'investissement et $\pi^0 + \sum\limits_{i=1}^{i=d} \pi^i = 0$ dans le cas d'un portefeuille autofinancant.

On définit R_Π par $R_\Pi = \frac{W_T(x_0,\Pi) - W_0(x_0,\Pi)}{x_0}$ où $W_T(x_0, \pi) = x_0\pi^0(1 + r_0) + \sum\limits_{i=1}^{i=d} x_0\pi^i \frac{S_T^i}{S_0^i}$ et $W_0(x_0, \pi) = x_0\pi^0 + \sum\limits_{i=1}^{i=d} x_0\pi^i$

[0.5pt]4) Que représente la quantité $W_T(x_0, \Pi)$?

[0.5pt]5) Montrer que pour un portefeuille d'investissement (x_0, Π) on a $R_\Pi = \Pi' R$

[0.5pt]6) Montrer que pour un portefeuille autofinancant (x_0, Π) on a $R_\Pi = \Pi' R$

[0.5pt]7) Montrer que pour tout portefeuille (x_0, Π) on a $Var(R_\Pi) = \pi' \Sigma \pi$

[1pt]8) Montrer que si Σ n'était pas inversible alors on pourrait à partir des actifs risqués S^i construire un actif sans risque.

[1pt]9) A votre avis pour quelle raison considère-t-on Σ inversible dans le modèle de Markowitz ?

On suppose que l'on est dans le cadre des hypothèses de Markowitz et l'on considère deux portefeuilles d'investissements distincts (x_0, Π_1) et (x_0, Π_2) (écrits sous forme canonique) qui sont sur la Capital Market Line qui, on le rappelle, est construite à partir du portefeuille de marché (écrit sous forme canonique)(x_0, Π_M) de rendement R_M et de l'actif sans risque (écrit sous forme canonique)(x_0, Π_0) de rendement certain r_0.

[0.5pt]10) Quels sont les composantes du vecteur Π_0 ?

11) Si on considère le portefeuille (x_0, Π) défini par $\Pi = \lambda \Pi_0 + (1 - \lambda)\Pi_M$
[0.5pt]a) montrer que (x_0, Π) est un portefeuille d'investissement
[0.25pt]b) quel est son espérance de rendement en fonction de λ, r_0 et $E[R_M]$?
[0.25pt]c) quel est son écart type de rendement en fonction de λ et $\sigma[R_M]$?
[0.5pt]d) montrer que si $\lambda \leq 1$ alors (x_0, Π) est sur la Capital Market Line
[1pt]e) où se situe dans le plan des $\begin{pmatrix} \sigma(R_\Pi) \\ E(R_\Pi) \end{pmatrix}$ le point correspondant au portefeuille (x_0, Π) par rapport au segment défini par les points correspondants au portefeuille de marché et à l'actif sans risque, suivant les valeurs de λ.

[1pt]12) Montrer que Corrélation$(R_{\Pi_1}, R_{\Pi_2}) = 1$

13)
[0.5pt]a) montrer que le portefeuille de marché (x_0, Π_M) peut se construire à l'aide de (x_0, Π_1) et (x_0, Π_2)
[0.5pt]b) montrer que le portefeuille sans risque peut se construire à l'aide de (x_0, Π_1) et (x_0, Π_2)

On considère maintenant un portefeuille d'investissement quelconque (x_0, Π_P)

14)

[1.5pt]a) démontrer l'équation: $E[R_P] = r_0 + \beta_{P,M} (E[R_M] - r_0)$
[0.5pt]b) comment s'appelle cette équation ?

[1pt]15) Démontrer l'équation: $R_P = r_0 + \beta_{P,M} (R_M - r_0) + \epsilon$ où ϵ est une loi normale centrée indépendante de R_M.

[1pt]16) Comment dans le plan des $\begin{pmatrix} \sigma_P \\ m_P \end{pmatrix}$ pouvez vous lire géométriquement pour un portefeuille d'investissement (x_0, Π_P) donné la quantité $\beta_{P,M}\sigma_M$?