Master M1 - Mido: 2 Juillet 2018
Rattrapage: Gestion de Portefeuille [1]: Durée 1h30

Notations:
Lorsque l'on considère une économie avec d actifs risqués S_1, S_2, $...S_d$, on note:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \vdots \\ \pi^d \end{pmatrix}$$ la proportion à l'instant 0 des investissements dans les actifs risqués S_i

R_π le rendement du portefeuille π sur $[0, T]$, m_π son espérance et σ_π son écart type.
r_0 le taux sans risque
m_T l'espérance de rendement du portefeuille tangent et σ_T son écart type

Exercice 1: [5pts]
On considère les portefeuilles suivants dont on indique: les espérances de rendement $E(R_{P_i})$, les bétas $\beta_T(P_i)$ par rapport au portefeuille tangent, les écarts types de rendements $\sigma(R_{P_i})$, et les risques spécifiques $\sigma(\epsilon_{P_i})$:

Portefeuille	$E(R_{P_i})$	$\beta_T(P_i)$	$\sigma(R_{P_i})$	$\sigma(\epsilon_{P_i})$
P_1	6%	0.5	10%	?%
P_2	21%	2	?	10%
P_3	?	1.5	30%	0%
P_4	11%	?	20%	?

On rappelle l'équation de la Security Market Line:
$R_P - r_0 = \beta_T(P)(R_T - r_0) + \epsilon_P$
où R_T est le rendement du portefeuille tangent

1. **[2pts]** A partir de la table déduire r_0, m_T and σ_T
Correction:
From P_1 and P_2 we get $6\% - r_0 = 0.5(m_T - r^0)$ and $21\% - r_0 = 2(m_T - r^0)$ so $r^0 = 1\%$ and $m_T = 11\%$.
For portfolio 3: $\sigma(\epsilon_{P_3}) = 0 \Longrightarrow \sigma(R_{P_3}) = \beta_T(P_3)\sigma_T \Longrightarrow \sigma_T = 20\%$

2. **[3pts]** Compléter la table
$\sigma(R_{P_1}) = \beta_T(P_1)\sigma(R_T) \Longrightarrow \sigma(\epsilon_{P_1}) = 0$
$\sigma(R_{P_2}) = \sqrt{\beta_T^2(P_1)\sigma^2(R_T) + \sigma^2(\epsilon_{P_1})} = \sqrt{17}10\% = \sqrt{16(10\%)^2 + (10\%)^2}$
$E(R_{P_3}) = 1\% + 1.5(11\% - 1\%) = 16\%$
$E(R_{P_4}) = E(R_T) \Longrightarrow \beta_T(P_4) = 1$
$\sigma(R_{P_4}) = \beta_T(P_4)\sigma(R_T) \Longrightarrow \sigma(\epsilon_{P_4}) = 0$

Exercice 2: [5pts]

[1] Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

On considère un modèle à deux facteurs . Dans ce modèle le rendement d'un actif s'écrit: $R_P = r_0 + b_P^1 f_1 + b_P^2 f_2 + \epsilon_P$

On suppose que les conditions de l'APT sont satisfaites et qu'il y a un actif sans risque de rendement r_0 et trois actifs risqués S_1,S_2, S_3 avec les caractéristiques suivantes :

Actifs S_i	$E[R_i]$	b_i^1	b_i^2
S_1	$12,0\%$	1	$0,5$
S_2	$13,4\%$	3	$0,2$
S_3	$12,0\%$	3	$-0,5$

1. **[2.5pts]** Si il n'y a pas d'arbitrage quel est l'espérance de rendement de l'actif P vérifiant $b_P^1 = 1$ et $b_P^2 = -1$?

   Correction: we find $r_0, \lambda_1, \lambda_2$ by solving three equations
   $r_0 + \lambda_1 + 0.5\lambda_2 = 12\%$
   $r_0 + 3\lambda_1 + 0.2\lambda_2 = 13.4\%$
   $r_0 + 3\lambda_1 - 0.5\lambda_2 = 12\%$
   which gives: $r_0 = 10\%,\ \lambda_1 = 1\%,\ \lambda_2 = 2\%.$
   So, $E[R_P] = 10\% + 1\% - 2\% = 9\%$

2. **[1.5pts]** On considère un actif Q tel que $b_Q^1 = 1$ and $b_Q^2 = 2$. Construisez un portefeuille d'investissement $\pi_Q = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ à partir des 3 actifs S_1,S_2,S_3 ayant les mêmes sensibilités aux facteurs que Q.
   Correction: we solve three equations
   $\pi_1 + 3\pi_2 + 3\pi_3 = 1$
   $0.5\pi_1 + 0.2\pi_2 - 0.5\pi_3 = 2$
   $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$
   which gives: $\pi_1 = 1,\ \pi_2 = \frac{15}{7},\ \pi_3 = -\frac{15}{7}$

3. **[1pts]** Quel est l'espérance de rendement du portefeuille π_Q défini précédemment
   Correction: based on the factors we find $E[R_Q] = 10\% + 1\% + 4\% = 15\%$
   based on the portfolio replication we find $E[R_Q] = 12\% + \frac{15}{7} \times 13.4\% - \frac{15}{7} \times 12\% = 15\%$

Problème: [10pts]

On considère d actifs risqués S_1, S_2, ...S_d et π_F un portefeuille d'investissement qui appartient à la frontière efficiente $\mathcal{F}$ construit à partir des S_i.
Soient π_P et π_Q deux portefeuilles d'investissements construits à partir des S_i.
On considère pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les portefeuilles:

- $\pi_{P,\lambda} = \lambda\pi_F + (1-\lambda)\pi_P$ et
- $\pi_{Q,\lambda} = \lambda\pi_F + (1-\lambda)\pi_Q$

On utilise les notations suivantes:

$m_P = E(R(\pi_P)), m_Q = E(R(\pi_Q)), m_{P,\lambda} = E(R(\pi_{P,\lambda}))\ m_{Q,\lambda} = E(R(\pi_{Q,\lambda}))$
$\sigma_P = \sigma(R(\pi_P)), \sigma_Q = \sigma(R(\pi_Q)), \sigma_{P,\lambda} = \sigma(R(\pi_{P,\lambda}))\ \sigma_{Q,\lambda} = \sigma(R(\pi_{Q,\lambda}))$
$m_F = E(R(\pi_F)), \sigma_F = \sigma(R(\pi_F))$

1. **[0.5pt]** Exprimer $m_{P,\lambda}$ et $m_{Q,\lambda}$ en fonction de λ, m_F, m_P et m_Q
   Correction:
   $m_{P,\lambda} = \lambda m_F + (1-\lambda)m_P$
   $m_{Q,\lambda} = \lambda m_F + (1-\lambda)m_Q$

2. **[0.5pt]** Exprimer $\sigma_{P,\lambda}$ et $\sigma_{Q,\lambda}$ en fonction de λ, σ_F, σ_P et σ_Q et des corrélations de rendements $\rho_{P,F}$ et $\rho_{Q,F}$
   Correction:
   $\sigma_{P,\lambda} = [\lambda^2\sigma_F^2 + (1-\lambda)^2\sigma_P^2 + 2\rho_{P,F}\lambda(1-\lambda)\sigma_F\sigma_P]^{\frac{1}{2}}$
   $\sigma_{Q,\lambda} = [\lambda^2\sigma_F^2 + (1-\lambda)^2\sigma_Q^2 + 2\rho_{Q,F}\lambda(1-\lambda)\sigma_F\sigma_Q]^{\frac{1}{2}}$

3. Quel est le type de la courbe $\{\begin{pmatrix} \sigma_{Q,\lambda} \\ m_{Q,\lambda} \end{pmatrix}, \lambda \in [0,1]\}$ dans les cas suivants:

   a) **[1pt]** $\rho_{Q,F} = 1$

   Correction: $\rho_{Q,F} = 1$ un segment entre les deux points $\begin{pmatrix} \sigma_F \\ m_F \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sigma_Q \\ m_Q \end{pmatrix}$

   b) **[1pt]** $\rho_{Q,F} = -1$

   Correction: $\rho_{Q,F} = -1$ un cone joignant les deux points $\begin{pmatrix} \sigma_F \\ m_F \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sigma_Q \\ m_Q \end{pmatrix}$ et qui intersecte l'acte des $\sigma = 0$ (dans la plupart des cas on n'aura pas de portefeuille de corrélation -1).

   c) **[1pt]** $-1 < \rho_{Q,F} < 1$

   Correction: une hyperbole qui relie les deux points $\begin{pmatrix} \sigma_F \\ m_F \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sigma_Q \\ m_Q \end{pmatrix}$

4. **[1pt]** Calculer les vecteurs $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=1}\begin{pmatrix} \sigma_{P,\lambda} \\ m_{P,\lambda} \end{pmatrix}$ et $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=1}\begin{pmatrix} \sigma_{Q,\lambda} \\ m_{Q,\lambda} \end{pmatrix}$
   Correction: $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=1}[\lambda^2\sigma_F^2+(1-\lambda)^2\sigma_P^2+2\rho_{P,F}\lambda(1-\lambda)\sigma_F\sigma_P]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sigma_F^2-2\rho_{P,F}\sigma_F\sigma_P}{2\sigma_F}$
   donc $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=1}\begin{pmatrix} \sigma_{P,\lambda} \\ m_{P,\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_F - \rho_{P,F}\sigma_P \\ m_F - m_P \end{pmatrix}$ et on a les mêmes expressions pour Q

5. **[1pt]** Pour quelles raisons les deux vecteurs dérivés définis à la question 4) sont ils colinéaires ?
   Correction: Les deux vecteurs doivent être colinéaires avec le vecteur tangent à la frontière efficiente $\mathcal{F}$ et sont donc également colinéaires entre eux

6. **[1pt]** Déduire de 5) une relation entre m_F, m_P, m_Q, $\beta_{P,F}$ et $\beta_{Q,F}$
   Correction: On doit donc avoir
   $(\sigma_F - \rho_{P,F}\sigma_P)(m_F - m_Q) = (\sigma_F - \rho_{Q,F}\sigma_Q)(m_F - m_P)$

   Supposons maintenant qu'il existe un actif sans risque de rendement certain m_0 et que π_F soit le portefeuille efficient définissant avec le portefeuille sans risque la "Capital Market Line". Notons Π_λ le portefeuille d'investissement construit en investissant une proportion λ de la richesse dans le portefeuille risqué π_F

et la proportion $1-\lambda$ dans l'actif sans risque. On note $m_\lambda = E[R(\Pi_\lambda)]$ et $\sigma_\lambda = \sigma[R(\Pi_\lambda)]$.

7. **[1pt]** Donner les expresssions de m_λ et $\sigma_\lambda$en fonctions de λ, m_F, m_0 et σ_F
   Correction: $\sigma_\lambda = |\lambda|\sigma_F$, et $m_\lambda = \lambda m_F + (1-\lambda)m_0$

8. **[1pt]** calculer $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=1} \begin{pmatrix} \sigma_\lambda \\ m_\lambda \end{pmatrix}$

   Correction: $\begin{pmatrix} \sigma_F \\ m_F - m_0 \end{pmatrix}$

9. **[1pt]** Déduire de ce qui précède l'équation de la "Security Market Line":
   $m_P - m_0 = \beta_{P,F}(m_F - m_0)$
   Correction: On doit avoir dans la question 8) aussi colinéarite entre le vecteur derivé et le vecteur tangent à la frontière efficiente F, donc on a colinéarité entre:
   $\begin{pmatrix} \sigma_F \\ m_F - m_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sigma_F - \rho_{P,F}\sigma_P \\ m_F - m_P \end{pmatrix}$
   donc $\sigma_F(m_F - m_P) = (\sigma_F - \rho_{P,F}\sigma_P)(m_F - m_0)$
   $\Rightarrow \sigma_F(m_0 - m_P) = -\rho_{P,F}\sigma_P(m_F - m_0)$
   $\Rightarrow (m_P - m_0) = \rho_{P,F}\frac{\sigma_P}{\sigma_F}(m_F - m_0)$ cqfd