Master M1 - Mido: 2 Juillet 2018

Rattrapage: Gestion de Portefeuille [1]: Durée 1h30

Notations:

Lorsque l'on considère une économie avec d actifs risqués S_1, S_2, $...S_d$, on note:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \vdots \\ \pi^d \end{pmatrix}$$ la proportion à l'instant 0 des investissements dans les actifs risqués S_i

R_π le rendement du portefeuille π sur $[0, T]$, m_π son espérance et σ_π son écart type.
r_0 le taux sans risque
m_T l'espérance de rendement du portefeuille tangent et σ_T son écart type

Exercice 1: [5pts]

On considère les portefeuilles suivants dont on indique: les espérances de rendement $E(R_{P_i})$, les bétas $\beta_T(P_i)$ par rapport au portefeuille tangent, les écarts types de rendements $\sigma(R_{P_i})$, et les risques spécifiques $\sigma(\epsilon_{P_i})$:

Portefeuille	$E(R_{P_i})$	$\beta_T(P_i)$	$\sigma(R_{P_i})$	$\sigma(\epsilon_{P_i})$
P_1	6%	0.5	10%	?%
P_2	21%	2	?	10%
P_3	?	1.5	30%	0%
P_4	11%	?	20%	?

On rappelle l'équation de la Security Market Line:
$R_P - r_0 = \beta_T(P)(R_T - r_0) + \epsilon_P$
où R_T est le rendement du portefeuille tangent

1. **[2pts]** A partir de la table déduire r_0, m_T and σ_T
2. **[3pts]** Compléter la table

Exercice 2: [5pts]

On considère un modèle à deux facteurs . Dans ce modèle le rendement d'un actif s'écrit: $R_P = r_0 + b_P^1 f_1 + b_P^2 f_2 + \epsilon_P$

On suppose que les conditions de l'APT sont satisfaites et qu'il y a un actif sans risque de rendement r_0 et trois actifs risqués S_1,S_2, S_3 avec les caractéristiques suivantes :

Actifs S_i	$E[R_i]$	b_i^1	b_i^2
S_1	$12,0\%$	1	$0,5$
S_2	$13,4\%$	3	$0,2$
S_3	$12,0\%$	3	$-0,5$

[1] Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

1. **[2.5pts]** Si il n'y a pas d'arbitrage quel est l'espérance de rendement de l'actif P vérifiant $b_P^1 = 1$ et $b_P^2 = -1$?

2. **[1.5pt]** On considère un actif Q tel que $b_Q^1 = 1$ and $b_Q^2 = 2$. Construisez un portefeuille d'investissement $\pi_Q = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ à partir des 3 actifs S_1,S_2,S_3 ayant les mêmes sensibilités aux facteurs que Q

3. **[1pt]** Quel est l'espérance de rendement du portefeuille π_Q défini précédemment

Problème: [10pts]

On considère d actifs risqués S_1, S_2, $...S_d$ et π_F un portefeuille d'investissement qui appartient à la frontière efficiente $\mathcal{F}$ construit à partir des S_i.
Soient π_P et π_Q deux portefeuilles d'investissements construits à partir des S_i.
On considère pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les portefeuilles:

- $\pi_{P,\lambda} = \lambda\pi_F + (1-\lambda)\pi_P$ et
- $\pi_{Q,\lambda} = \lambda\pi_F + (1-\lambda)\pi_Q$

On utilise les notations suivantes:
$m_P = E(R(\pi_P))$, $m_Q = E(R(\pi_Q))$, $m_{P,\lambda} = E(R(\pi_{P,\lambda}))$ $m_{Q,\lambda} = E(R(\pi_{Q,\lambda}))$
$\sigma_P = \sigma(R(\pi_P))$, $\sigma_Q = \sigma(R(\pi_Q))$, $\sigma_{P,\lambda} = \sigma(R(\pi_{P,\lambda}))$ $\sigma_{Q,\lambda} = \sigma(R(\pi_{Q,\lambda}))$
$m_F = E(R(\pi_F))$, $\sigma_F = \sigma(R(\pi_F))$

1. **[0.5pt]** Exprimer $m_{P,\lambda}$ et $m_{Q,\lambda}$ en fonction de λ, m_F, m_P et m_Q

2. **[0.5pt]** Exprimer $\sigma_{P,\lambda}$ et $\sigma_{Q,\lambda}$ en fonction de λ, σ_F, σ_P et σ_Q et des corrélations de rendements $\rho_{P,F}$ et $\rho_{Q,F}$

3. Quel est le type de la courbe $\{\begin{pmatrix} \sigma_{Q,\lambda} \\ m_{Q,\lambda} \end{pmatrix}, \lambda \in [0,1]\}$ dans les cas suivants:

   a) **[1pt]** $\rho_{Q,F} = 1$

   b) **[1pt]** $\rho_{Q,F} = -1$

   c) **[1pt]** $-1 < \rho_{Q,F} < 1$

4. **[1pt]** Calculer les vecteurs $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=1} \begin{pmatrix} \sigma_{P,\lambda} \\ m_{P,\lambda} \end{pmatrix}$ et $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=1} \begin{pmatrix} \sigma_{Q,\lambda} \\ m_{Q,\lambda} \end{pmatrix}$

5. **[1pt]** Pour quelles raisons les deux vecteurs dérivés définis à la question 4) sont ils colinéaires ?

6. **[1pt]** Déduire de 5) une relation entre m_F, m_P, m_Q, $\beta_{P,F}$ et $\beta_{Q,F}$

   Supposons maintenant qu'il existe un actif sans risque de rendement certain m_0 et que π_F soit le portefeuille efficient définissant avec le portefeuille sans risque la "Capital Market Line". Notons Π_λ le portefeuille d'investissement construit en investissant une proportion λ de la richesse dans le portefeuille risqué π_F et la proportion $1-\lambda$ dans l'actif sans risque. On note $m_\lambda = E[R(\Pi_\lambda)]$ et $\sigma_\lambda = \sigma[R(\Pi_\lambda)]$.

7. **[1pt]** Donner les expresssions de m_λ et $\sigma_\lambda$en fonctions de λ, m_F, m_0 et σ_F
8. **[1pt]** calculer $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=1} \begin{pmatrix} \sigma_\lambda \\ m_\lambda \end{pmatrix}$
9. **[1pt]** Déduire de ce qui précède l'équation de la "Security Market Line":
$m_P - m_0 = \beta_{P,F}(m_F - m_0)$