Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Partiel du 03/10/2017.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 Soit (X, d) un espace métrique compact. A tout sous-ensemble compact non vide K de X on associe la fonction distance

$$d_K(x) = \min_{y \in K} d(x, y) \qquad \forall x \in X.$$

1. Montrer que d_K est une fonction Lipschitzienne de constante 1 :

$$|d_K(x) - d_K(x')| \leq d(x, x') \qquad \forall x, x' \in X.$$

2. Soit (K_n) une suite de sous-ensembles compacts non vides de X. On suppose que la suite (d_{K_n}) converge uniformément vers une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$. Soit

$$K := \{x \in X,\ \phi(x) = 0\}.$$

   (a) Vérifier que K est un sous-ensemble non vide et compact de X.

   (b) Montrer que $\phi = d_K$.

   On considère l'ensemble $\mathcal{K}$ des compacts non vides de X. Sur $\mathcal{K}$ on définit la distance

$$\delta(K_1, K_2) := \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_\infty,$$

   où $\| \cdot \|_\infty$ est la norme sup habituelle sur l'espace des fonctions continues sur X.

3. Vérifier que δ est bien une distance sur $\mathcal{K}$.

4. Montrer que $\mathcal{K}$ est compact pour la distance δ.

Exercice 2 Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, avec un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et une norme notée $\| \cdot \|$. On suppose que H possède une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *(on rappelle que cela signifie que (e_n) est une famille orthonormée de H qui est totale, c'est à dire que l'espace vectoriel engendré par (e_n) est dense dans H. En particulier, pour tout $x \in H$, la suite $(\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans H vers x).* On note B la boule unité fermée de H. On définit sur $B \times B$ la fonction

$$d(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\langle x_1 - x_2, e_n \rangle|}{n^2 + 1} \qquad \forall x_1, x_2 \in B.$$

1. Montrer que d est bien définie et est une distance sur B.

2. On suppose qu'une suite (x_k) d'éléments de B converge faiblement vers $x \in H$.
   (a) *Démontrer* que x appartient à B.
   (b) Prouver que (x_k) tend vers x pour la distance d.
3. Inversement, soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B qui converge pour la distance d vers un élément $x \in B$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la suite réelle $(\langle x_k, e_n\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle x, e_n\rangle$ lorsque $k \to +\infty$.
   (b) En déduire que la suite (x_k) converge faiblement vers x.
4. On suppose maintenant qu'il existe une distance δ sur $H \times H$ avec la propriété suivante : pour toute suite (x_k) de H et pour tout élément $x \in H$, (x_k) converge faiblement vers x, si et seulement si, (x_k) converge vers x pour la distance δ.
   (a) Montrer que la suite (e_n) (où (e_n) est la base hilbertienne de H introduite plus haut) tend faiblement vers 0 lorsque n tend vers l'infini, mais qu'elle ne tend pas fortement vers 0.
   (b) Montrer qu'il existe une suite extraite (n_k) telle que $\delta(0, ke_{n_k}) \leq 1/k$ pour tout $k \geq 1$. On pose $x_k = ke_{n_k}$ pour tout $k \geq 1$.
   (c) Vérifier que la suite (x_k) tend faiblement vers 0 lorsque $k \to +\infty$ mais que $\|x_k\| \to +\infty$.
   (d) Que peut-on en déduire ?

Barème indicatif : Exercice 1 : 8 points. Exercice 2 : 12 points.