Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Partiel du 03/10/2017.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 Soit (X, d) un espace métrique compact. A tout sous-ensemble compact K de X on associe la fonction distance

$$d_K(x) = \min_{y \in K} d(x, y) \qquad \forall x \in X.$$

1. Montrer que d_K est une fonction Lipschitzienne de constante 1 :

$$|d_K(x) - d_K(x')| \leq d(x, x') \qquad \forall x, x' \in X.$$

2. Soit (K_n) une suite de sous-ensembles non vides compacts de X. On suppose que la suite (d_{K_n}) converge uniformément vers une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$. Soit

$$K := \{x \in X,\ \phi(x) = 0\}.$$

   (a) Vérifier que K est un sous-ensemble non vide et compact de X.

   (b) Montrer que $\phi = d_K$.

   On considère l'ensemble $\mathcal{K}$ des compacts non vides de X. Sur $\mathcal{K}$ on définit la distance

$$\delta(K_1, K_2) := \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_\infty,$$

   où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme sup habituelle sur l'espace des fonctions continues sur X.

3. Vérifier que δ est bien une distance sur $\mathcal{K}$.

4. Montrer que $\mathcal{K}$ est compact pour la distance δ.

Solution :

1. *Soient $x, x' \in X$ et $y \in K$ tel que $d_K(x, y) = d(x, y)$ (y existe puisque K est compact). Alors*

$$d_K(x') \leq d(x', y) \leq d(x', x) + d(x, y) = d(x', x) + d_K(x).$$

   En échangeant les rôles de x et x', on a de même que $d_K(x) \leq d(x, x') + d_K(x')$. On peut conclure alors que

$$|d_K(x) - d_K(x')| \leq d(x, x') \qquad \forall x, x' \in X.$$

2. (a) *Puisque* ϕ *est continue et* X *est compact, l'ensemble* K *est compact. Comme* K_n *est non vide, il existe* $x_n \in K_n$. *L'ensemble* X *étant compact, il existe une sous-suite* (x_{n_k}) *de la suite* (x_n) *et un élément* $x \in X$ *tel que* (x_{n_k}) *converge vers* x. *Alors, par convergence uniforme de* (d_{K_n}) *vers* K, *on a*

$$0 = \lim_{k\to+\infty} d_{K_{n_k}}(x_{n_k}) = \phi(x).$$

Donc x *appartient à* K *et* K *est non vide.*

   (b) *Soit* $x \in X$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $y_n \in K_n$ *tel que* $d_{K_n}(x) = d(x, y_n)$. *Comme* X *est compact, il existe une sous-suite* (y_{n_k}) *de la suite* (y_n) *et un élément* $y \in X$ *tel que* (y_{n_k}) *converge vers* y. *De plus, le même argument que dans la question précédente montre que* y *appartient à* K. *Alors, par convergence uniforme de* (d_{K_n}) *vers* K, *on a*

$$\phi(x) = \lim_{k\to+\infty} d_{K_n}(x) = \lim_{k\to+\infty} d(x, y_{n_k}) = d(x,y) \geq d_K(x).$$

Donc $\phi \geq d_K$.
Inversement, soit $y \in X$ *tel que* $d_K(x) = d(x,y)$. *Comme* $\phi(y) = 0$, *on a* $d_{K_n}(y) \to 0$. *Alors*

$$\phi(x) = \lim_n d_{K_n}(x) \leq \lim_n (d_{K_n}(y) + d(x,y)) = \phi(y) + d(x,y) = d(x,y) = d_K(x).$$

3. *La fonction* δ *est bien définie sur* $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ *et est positive sur cet ensemble. De plus, si* $\delta(K_1, K_2) = 0$ *pour* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, $\|d_{K_1} - d_{K_2}\|_\infty = 0$, *ce qui prouve que* $d_{K_1} = d_{K_2}$ *puisque* $\|\cdot\|_\infty$ *est une distance. Mais alors*

$$K_1 = \{x \in X, d_{K_1}(x) = 0\} = \{x \in X, d_{K_2}(x) = 0\} = K_2.$$

Montrons enfin l'inégalité triangulaire : si $K_1, K_2, K_3 \in \mathcal{K}$, *alors*

$$\delta(K_1, K_2) = \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_\infty \leq \|d_{K_1} - d_{K_3}\|_\infty + \|d_{K_3} - d_{K_2}\|_\infty = \delta(K_1, K_3) + \delta(K_3, K_2).$$

4. *Soit* (K_n) *une suite d'éléments de* $\mathcal{K}$. *Alors la suite de fonctions* (d_{K_n}) *est équi-Lipschitzienne (de constante 1) donc équicontinue . Comme* K_n *est non vide, il existe* $y_n \in K_n$. *Alors, pour tout* $x \in X$,

$$d_{K_n}(x) \leq d(x,y) \leq \max_{a,b\in X} d(a,b),$$

où le terme de droite est fini puisque X *est compact et ne dépend pas de* n. *Donc la suite* $(d_{K_n}(x))$ *est uniformément bornée . Le théorème d'Ascoli affirme qu'il existe une sous-suite* (n_k) *et une fonction continue* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *telles que* $(d_{K_{n_k}})$ *converge uniformément vers* ϕ . *On sait alors que* $\phi = d_K$ *où* $K = \{x \in X,\ \phi(x)\}$. *Cela prouve la convergence uniforme de* $(d_{K_{n_k}})$ *vers* d_K, *et donc la convergence de* (K_n) *vers* K *pour la distance* δ .

Exercice 2 Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, avec un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot,\rangle$ et une norme notée $\|\cdot\|$. On suppose que H possède une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on rappelle que cela signifie que (e_n) est famille orthonormée de H qui est totale, i.e., l'espace vectoriel engendré par (e_n) est dense dans H. En particulier, pour tout $x \in H$, la suite $(\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans H vers x). On note B la boule unité fermée de H. On définit sur $B \times B$ la fonction

$$d(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\langle x_1 - x_2, e_n\rangle|}{n^2+1} \qquad \forall x_1, x_2 \in B.$$

1. Montrer que d est bien définie et est une distance sur B.
2. On suppose qu'une suite (x_k) d'éléments de B converge faiblement vers $x \in H$.
   (a) *Démontrer* que x appartient à B.
   (b) Prouver que (x_k) tend vers x pour la distance d.
3. Inversement, soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B qui converge pour la distance d vers un élément $x \in B$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la suite réelle $(\langle x_k, e_n\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle x, e_n\rangle$ lorsque $k \to +\infty$.
   (b) En déduire que la suite (x_k) converge faiblement vers x.
4. On suppose maintenant qu'il existe une distance δ sur $H \times H$ avec la propriété suivante : pour toute suite (x_k) de H et pour tout élément $x \in H$, (x_k) converge faiblement vers x, si et seulement si, (x_k) converge vers x pour la distance δ.
   (a) Montrer que la suite (e_n) (où (e_n) est la base hilbertienne de H introduite plus haut) tend faiblement vers 0 lorsque n tend vers l'infini, mais qu'elle ne tend pas fortement vers 0.
   (b) Montrer qu'il existe une suite extraite (n_k) telle que $\delta(0, ke_{n_k}) \leq 1/k$ pour tout $k \geq 1$. On pose $x_k = ke_{n_k}$ pour tout $k \geq 1$.
   (c) Vérifier que la suite (x_k) tend faiblement vers 0 lorsque $k \to +\infty$ mais que $\|x_k\| \to +\infty$.
   (d) Que peut-on en déduire ?

Solution.

1. On note que, pour tout $x_1, x_2 \in B$ et $n \in \mathbb{N}$, on a par Cauchy-Schwartz

$$0 \leq \frac{|\langle x_1 - x_2, e_n\rangle|}{n^2+1} \leq \frac{\|x_1 - x_2\|\|e_n\|}{n^2+1} \leq \frac{(\|x_1\| + \|x_2\|)\|e_n\|}{n^2+1} \leq \frac{2}{n^2+1},$$

puisque $\|x_1\| \leq 1$, $\|x_2\| \leq 1$ et $\|e_n\| = 1$. Comme la série de terme général $(\frac{2}{n^2+1})$ converge, d est bien définie, est positive et vaut 0 si $x_1 = x_2$. De plus, $d(x_1, x_2) = 0$ implique que $\langle x_1 - x_2, e_n\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme (e_n) est une base Hilbertienne de H, cela montre que $x_1 = x_2$.

L'inégalité triangulaire est immédiate puisque, pour tout $x_1, x_2, x_3 \in B$, on a

$$d(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\langle x_1 - x_2, e_n\rangle|}{n^2+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\langle x_1 - x_3, e_n\rangle|}{n^2+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\langle 3_1 - x_2, e_n\rangle|}{n^2+1} \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2).$$

2. (a) Comme (x_k) d'éléments de B converge faiblement vers $x \in H$, on a, pour tout $y \in H$,

$$\langle x, y\rangle = \lim_k \langle x_k, y\rangle \leq \liminf_k \|x_k\|\|y\| \leq \|y\|.$$

Si on prend $y = x$, cela implique $\|x\|^2 \leq \|x\|$ et donc $\|x\| \leq 1$. En conclusion, $x \in B$.

(b) *Par définition de la convergence faible, on a*

$$\lim_k \frac{|\langle x_k - x, e_n\rangle|}{n^2+1} = 0.$$

Or on a vu que

$$0 \le \frac{|\langle x_1 - x_2, e_n\rangle|}{n^2+1} \le \frac{2}{n^2+1},$$

où la série $(1/(n^2+1))$ *est sommable. Par convergence dominée on en déduit que, lorsque* $k \to +\infty$,

$$d(x_k, x) = \sum_n \frac{|\langle x_k - x, e_n\rangle|}{n^2+1} \to 0.$$

Donc (x_k) *tend vers* x *pour la distance* d.

3. (a) *Comme* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge pour la distance* d *vers un élément* $x \in B$, *on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_k \frac{|\langle x_1 - x_2, e_n\rangle|}{n^2+1} \le \lim_k \sum_{n'} \frac{|\langle x_k - x, e_n\rangle|}{n^2+1} = \lim_k d(x_k, x) = 0.$$

Donc la suite $(\langle x_k, e_n\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\langle x, e_n\rangle$ *lorsque* $k \to +\infty$.

(b) *Soit* $y \in H$. *On sait que la suite* $(y_p := \sum_{n=0}^p \langle y, e_n\rangle e_n)_{p\in\mathbb{N}}$ *tend vers* y *dans* H. *Alors*

$$|\langle x_k, y\rangle - \langle x, y\rangle| \le |\langle x_k, y_p\rangle - \langle x, y_p\rangle| + |\langle x_k - x, y - y_p\rangle|,$$

où

$$|\langle x_k - x, y - y_p\rangle| \le \|x_k - x\| \|y - y_p\| \le 2\|y - y_p\|$$

(puisque x_k *et* x *sont dans* B*) et*

$$|\langle x_k, y_p\rangle - \langle x, y_p\rangle| = \left|\sum_{n=0}^p \langle x_k - x, e_n\rangle\right| \le \sum_{n=0}^p |\langle x_k - x, e_n\rangle|.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, *fixons d'abord* p *tel que* $\|y - y_p\| \le \epsilon/4$, *puis* $k_0 \ge 0$ *tel que, pour tout* $n \in \{0, \ldots, p\}$, *on a* $|\langle x_k - x, e_n\rangle| \le \epsilon/(2(p+1))$. *Alors, pour tout* $k \ge k_0$, *on a*

$$|\langle x_k, y\rangle - \langle x, y\rangle| \le 2\|y - y_p\| + \sum_{n=0}^p |\langle x_k - x, e_n\rangle| \le \epsilon.$$

Cela montre que $(\langle x_k, y\rangle)$ *tend vers* $\langle x, y\rangle$, *et donc la converge faible de* (x_k) *vers* x.

4. (a) *On sait que* $\|e_n\| = 1$, *donc* (e_n) *ne tend pas fortement vers* 0 . *Soit* $y \in H$. *Alors la série* $\sum_n \langle y, e_n\rangle^2$ *converge (Parseval) et donc la suite* $(\langle y, e_n\rangle)$ *tend vers 0. Cela montre que* (e_n) *tend faiblement vers 0 .*

(b) *On va construire par récurrence sur* k *une suite* (n_k) *telle que* $n_{k+1} \ge n_k + 1$ *et* $\delta(0, ke_{n_k}) \le 1/k$. *Pour* $k = 1$, (e_n) *tend faiblement vers* 0 *lorsque* $n \to +\infty$, *la suite* $(\delta(0, e_n))$ *tend vers* 0 *par définition de* δ. *Donc il existe* n_1 *tel que* $\delta(0, e_{n_1}) \le 1$. *Supposons que* n_{k-1} *est bien défini pour un* $k \ge 2$. *Alors, comme la suite* (ke_n) *tend faiblement vers* 0 *lorsque* $n \to +\infty$, *la suite* $(\delta(0, ke_n))$ *tend vers* 0. *Donc il existe* $n_k \ge n_{k-1} + 1$ *tel que* $\delta(0, ke_{n_k}) \le 1/k$.

(c) *Comme* δ *est une distance que que* $(\delta(0, x_k) = \delta(0, ke_{n_k}))$ *tend vers* 0, (x_k) *tend vers* x *pour la distance* δ *et donc tend faiblement vers* 0. *D'autre part,* $\|x_k\| = k\|e_{n_k}\| = k \to +\infty$ *lorsque* $k \to +\infty$.

(d) *On sait que, dans un espace de Hilbert, toute suite faiblement convergenct est bornée. L'hypothèse de départ de la question est donc fausse : il n'existe par de distance* δ *qui métrise la convergence faible sur l'espace tout entier.*

Barème indicatif : *Exercice 1 : 8 points. Exercice 2 : 12 points.*