Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen du 18/01/2018.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $I =]-1, 1[$ et note L^2 et H^1 pour $L^2(I)$ et $H^1(I)$ respectivement. On rappelle l'inégalité de Poincaré :

$$\|x\|_{L^2} \leq \|x'\|_{L^2} \qquad \forall x \in H^1 \text{ avec } x(0) = 0.$$

On considère le problème de calcul des variations suivant :

$$(*) \qquad \inf\left\{J(x), \quad x \in H^1,\ x(0) = 0\right\} \qquad \text{où } J(x) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|x'(t)|^2 + g(x(t)) \right) dt.$$

Noter que, par rapport au cas "classique" du cours, la fonction g n'est pas nécessairement bornée et la condition terminale $x(1)$ n'est pas spécifiée.

1. On suppose, *dans cette question seulement*, que $g(s) = -\theta s^2$ où $\theta > 0$.

   (i) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $y_n : I \to \mathbb{R}$ définie par

   $$y_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si } t \in]0, 1/2] \\ n(1-t) & \text{si } t \in [1/2, 1[\end{cases}$$

   Montrer que $y_n \in H^1$.

   (ii) Calculer $J(y_n)$ et en déduire qu'il existe $\theta_0 > 0$ tel que, pour tout $\theta \geq \theta_0$, le problème $(*)$ n'admet pas de solution.

   Dans toute la suite, on suppose que g vérifie l'inégalité suivante : il existe $C > 0$ et $\theta \in]0, 1/2[$ tels que

   $$g(s) \geq -C - \theta s^2 \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

2. Soit (x_n) une suite minimisante du problème $(*)$. Montrer que (x_n') est bornée dans L^2.

3. En déduire qu'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ et $x \in H^1$ tels que $(x_{\phi(n)})$ converge uniformément vers x sur $[0, 1]$ et $(x'_{\phi(n)})$ converge faiblement vers x' dans $L^2(I)$.

4. En déduire que le problème $(*)$ admet un minimum.

   On suppose à partir de maintenant que g est de classe C^1. On fixe x un minimum du problème et on admet que $J : H^1 \to \mathbb{R}$ est différentiable en x avec

   $$J'(x)(v) = \int_0^1 \left(x'(t)v'(t) + g'(x(t))v(t) \right) dt \qquad \forall v \in H^1.$$

5. Montrer que

$$\int_0^1 (\ x'(t)v'(t) + g'(x(t))v(t)\ )\ dt = 0 \qquad \forall v \in H^1 \text{ avec } v(0) = 0.$$

6. En déduire que x' est dans H^1 et calculer sa dérivée.

7. Montrer finalement que $x'(1) = 0$ et conclure que x est une solution de classe C^2 de l'équation

$$\begin{cases} x''(t) = g'(x(t)) & t \in [0,1] \\ x(0) = 0, \qquad x'(1) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 Dans tout l'exercice, $H = L^2(I)$ où $I =]0,1[$. On fixe $R \in L^2(I \times I)$.

1. Soit (x_n) une suite de H et $x \in H$. On suppose que la suite (x_n) tend faiblement vers x dans H. On pose

$$v_n(t) := \int_0^1 R(s,t)x_n(s)ds \qquad \text{et} \qquad v(t) := \int_0^1 R(s,t)x(s)ds.$$

Montrer que $v_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(v_n(t))$ tend vers $v(t)$ pour presque tout $t \in]0,1[$.

2. Montrer que (v_n) tend en fait vers v dans H.

3. On définit $T : H \to H$ par

$$T(x)(t) = \int_0^1 R(s,t)x(s)ds \qquad \text{pour p.t. } t \in]0,1[,\ \forall x \in H.$$

Montrer que T est un opérateur linéaire continu et compact sur H.

4. Quel est l'adjoint de T ?

5. *On suppose dans toute la suite* que $R(s,t) = \min\{s,t\}$. Soit $x \in H$ et $z = T(x)$. Vérifier que z appartient à $H^1(I)$, que z' appartient également à $H^1(I)$ et calculer $(z')'$. Déterminer aussi $z(0)$ et $z'(1)$.

6. Déterminer toutes les valeurs propres de T.

7. Déduire des questions précédentes que la famille $(\sqrt{2}\sin((\pi/2 + k\pi)t))_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

Barème indicatif : Exercice 1 : 10 points. Exercice 2 : 10 points.