Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen du 18/01/2018.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $I =]-1, 1[$ et note L^2 et H^1 pour $L^2(I)$ et $H^1(I)$ respectivement. On rappelle l'inégalité de Poincaré :

$$\|x\|_{L^2} \leq \|x'\|_{L^2} \qquad \forall x \in H^1 \text{ avec } x(0) = 0.$$

On considère le problème de calcul des variations suivant :

$$(*) \qquad \inf \left\{ J(x), \quad x \in H^1, \ x(0) = 0 \right\} \qquad \text{où } J(x) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|x'(t)|^2 + g(x(t)) \right) dt.$$

Noter que, par rapport au cas “classique” du cours, la fonction g n'est pas nécessairement bornée et la condition terminale $x(1)$ n'est pas spécifiée.

1. On suppose, *dans cette question seulement*, que $g(s) = -\theta s^2$ où $\theta > 0$.
   (i) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $y_n : I \to \mathbb{R}$ définie par
   $$y_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si } t \in]0, 1/2] \\ n(1-t) & \text{si } t \in [1/2, 1[\end{cases}$$
   Montrer que $y_n \in H^1$.
   (ii) Calculer $J(y_n)$ et en déduire qu'il existe $\theta_0 > 0$ tel que, pour tout $\theta \geq \theta_0$, le problème $(*)$ n'admet pas de solution.

   Dans toute la suite, on suppose que g vérifie l'inégalité suivante : il existe $C > 0$ et $\theta \in]0, 1/2[$ tels que
   $$g(s) \geq -C - \theta s^2 \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$
2. Soit (x_n) une suite minimisante du problème $(*)$. Montrer que (x'_n) est bornée dans L^2.
3. En déduire qu'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ et $x \in H^1$ tels que $(x_{\phi(n)})$ converge uniformément vers x sur $[0, 1]$ et $(x'_{\phi(n)})$ converge faiblement vers x' dans $L^2(I)$.
4. En déduire que le problème $(*)$ admet un minimum.

   On suppose à partir de maintenant que g est de classe C^1. On fixe x un minimum du problème et on admet que $J : H^1 \to \mathbb{R}$ est différentiable en x avec
   $$J'(x)(v) = \int_0^1 \left(x'(t)v'(t) + g'(x(t))v(t) \right) dt \qquad \forall v \in H^1.$$

5. Montrer que

$$\int_0^1 x'(t)v'(t) + g'(x(t))v(t)\ dt = 0 \qquad \forall v \in H^1 \text{ avec } v(0) = 0.$$

6. En déduire que x' est dans H^1 et calculer sa dérivée.

7. Montrer finalement que $(x')'(0) = 0$ et conclure que x est une solution de classe C^2 de l'équation

$$\begin{cases} x''(t) = g'(x(t)) & t \in [0,1] \\ x(0) = 0, \qquad x'(1) = 0. \end{cases}$$

Solution:

1. (i) *Notons que y_n est continue sur $[0,1]$, donc dans $L^2(I)$. D'autre part, pour toute fonction $v \in C_c^1(]0,1[)$, on a, par intégration par parties,*

$$\begin{aligned} \int_0^1 y_n(t)v'(t)dt &= \int_0^{1/2} ntv'(t)dt + \int_{1/2}^1 n(1-t)v'(t)dt \\ &= \Big[ntv(t)\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} nv(t)dt + \Big[n(1-t)v(t)\Big]_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 (-n)v(t)dt \\ &= -\int_0^{1/2} nv(t)dt + -\int_{1/2}^1 (-n)v(t)dt \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que $v(0) = v(1) = 0$ et que, pour $t = 1/2$, $nt = n(1-t)$. On en déduit que y_n a pour dérivée faible la fonction

$$y_n'(t) = \begin{cases} n & \text{si } t \in]0,1/2[\\ -n & \text{si } t \in]1/2,1[\end{cases}$$

Comme y_n' est borné (à n fixé), on a donc aussi $y_n' \in L^2$ (car I est borné). En conclusion y_n est dans H^1.

(ii) *On a*

$$J(y_n) = \frac{n^2}{2}(1 - \frac{\theta}{3}).$$

Donc, si on pose $\theta_0 = 3$, on a, pour tout $\theta > \theta_0$,

$$\lim_n J(y_n) = -\infty.$$

Comme $y_n \in H^1$ et $y_n(0) = 0$, on en déduit que

$$\inf\big\{J(x), \quad x \in H^1,\ x(0) = 0\big\} \le \lim_n J(y_n) = -\infty.$$

Donc l'infimum est $-\infty$ et le $(*)$ n'admet pas de solution.

2. *Remarquons d'abord que, si on prend $x(t) = 0$, alors $x \in H^1$, $x(0) = 0$ et $J(x) = g(0)$. Donc*

$$I := \inf\big\{J(x), \quad x \in H^1,\ x(0) = 0\big\} \le J(x) = g(0).$$

Si (x_n) une suite minimisante du problème $(*)$, alors il existe n_0 tel que

$$J(x_n) \le 1 + I \le J(x) \le 1 + g(0).$$

Cela montre que $J(x_n)$ est majoré par une constante notée $M := 1 + g(0)$.

D'autre part, par l'hypothèse sur g puis l'inégalité de Poincaré (puisque $x_n \in H^1$ et $x_n(0) = 0$),

$$\begin{aligned} J(x_n) &\geq \int_0^1 \frac{1}{2}|x_n'(t)|^2 dt - C - \theta \int_0^1 |x_n(t)|^2 dt \\ &\geq -C + \int_0^1 \frac{1}{2}|x_n'(t)|^2 dt - \theta \int_0^1 |x_n'(t)|^2 dt \\ &\geq -C + (\frac{1}{2} - \theta)\|x_n'\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $\theta < 1/2$ et nous avons montré que $J(x_n) \leq M$. On en déduit que

$$\|x_n'\|_{L^2}^2 \leq (\frac{1}{2} - \theta)^{-1}(M + C),$$

c'est-à-dire que (x_n') est borné dans L^2.

3. *On déduit alors de l'inégalité de Poincaré (qui s'applique ici puisque $x_n(0) = 0$) que*

$$\|x_n\|_{L^2} \leq \|x_n'\|_{L^2}^2 \leq (\frac{1}{2} - \theta)^{-1}(M + C),$$

et donc que (x_n) est bornée dans H^1. Par théorème de cours, on sait alors qu'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ et $x \in H^1$ tels que $(x_{\phi(n)})$ converge uniformément vers x et $(x'_{\phi(n)})$ converge faiblement vers x' dans $L^2(I)$.

4. *Par théorème de cours, on sait que, comme $(x'_{\phi(n)})$ tend faiblement dans L^2 vers x', on a*

$$\liminf_n \int_0^1 |x'_{\phi(n)}(t)|^2 dt \geq \int_0^1 |x'(t)|^2 dt.$$

Par convergence uniforme de $(x_{\phi(n)})$ vers x sur $[0, 1]$, la suite $(x_{\phi(n)})$ est bornée dans L^∞ par une constante M'. Par continuité uniforme de g sur $[-M', M']$ et convergence uniforme de $(x_{\phi(n)})$, la suite $(g \circ x_{\phi(n)})$ converge uniformément vers $g \circ x$ sur $[0, 1]$. On en déduit que

$$\lim_n \int_0^1 g(x_{\phi(n)}(t))dt = \int_0^1 g(u(t))dt.$$

De plus, par convergence uniforme (donc simple) de $(x_{\phi(n)})$ vers x, on a $x(0) = \lim_n x_{\phi(n)}(0) = 0$. Donc

$$I = \liminf_n J(x_{\phi(n)}) \geq J(x),$$

ce qui prouve que x est un minimum du problème $(*)$.

5. *Soit $v \in H^1$ tel que $v(0) = 0$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $x + hv \in H^1$ et vérifie $(x + hv)(0) = 0$. Donc*

$$J(x + hv) \geq J(x),$$

puisque x est un minimum. La fonction $h \to J(x + hv)$ a donc un minimum en $h = 0$: sa dérivée en 0 est donc nulle. Par dérivation des fonctions composées, on en déduit que

$$0 = \frac{d}{dh} J(x + hv)_{h=0} = J'(x)(v) = \int_0^1 x'(t)v'(t) + g'(x(t))v(t)\ dt.$$

6. *Rappelons que $x' \in L^2$. On déduit de l'égalité de la section précédente que, pour tout $v \in C_c^1(]1,1[)$, on a*

$$\int_0^1 x'(t)v'(t)dt = -\int_0^1 g'(x(t))v(t)dt,$$

ce qui montre que x' a pour dérivée faible $g' \circ x$ qui est continue, donc dans L^2. Par conséquent x' est dans H^1, avec $(x')' = g' \circ x$.

7. *De l'égalité précédente on sait que $(x')'$ est égal (presque partout) à la fonction continue $g' \circ x$. On en déduit que x a un représentant de classe C^2. D'autre part, en intégrant par parties l'égalité de la question (5), on a pour tout $v \in H^1$ avec $v(0) = 0$,*

$$0 = \int_0^1 x'(t)v'(t)+g'(x(t))v(t)\, dt = \left[x'(t)v(t)\right]_0^1 + \int_0^1 (-x''(t)v(t)+g'(x(t))v(t))\, dt = x'(1)v(1),$$

puisque $v(0) = 0$ et $x'' = g' \circ x$. Si on prend (par exemple) $v(t) = t$, on en déduit que $x'(1) = 0$. En résumé, on a que x est une solution de classe C^2 de l'équation

$$\begin{cases} x''(t) = g'(x(t)) & t \in [0,1] \\ x(0) = 0, \qquad x'(1) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 Dans tout l'exercice, $H = L^2(I)$ où $I =]0,1[$. On fixe $R \in L^2(I \times I)$.

1. Soit (x_n) une suite de H et $x \in H$. On suppose que la suite (x_n) tend faiblement vers x dans H. On pose

$$v_n(t) := \int_0^1 R(s,t)x_n(s)ds \qquad \text{et} \qquad v(t) := \int_0^1 R(s,t)x(s)ds.$$

Montrer que $v_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(v_n(t))$ tend vers $v(t)$ pour presque tout $t \in]0,1[$.

2. Montrer que (v_n) tend en fait vers v dans H.

3. On définit $T : H \to H$ par

$$T(x)(t) = \int_0^1 R(s,t)x(s)ds \qquad \text{pour p.t. } t \in]0,1[, \ \forall x \in H.$$

Montrer que T est un opérateur linéaire continu et compact sur H.

4. Quel est l'adjoint de T ?

5. *On suppose dans toute la suite* que $R(s,t) = \min\{s,t\}$. Soit $x \in H$ et $z = T(x)$. Vérifier que z appartient à $H^1(I)$, que z' appartient également à $H^1(I)$ et calculer $(z')'$. Déterminer aussi $z(0)$ et $z'(1)$.

6. Déterminer toutes les valeurs propres de T.

7. Déduire des questions précédentes que la famille $(\sqrt{2}\sin((\pi/2 + k\pi)t))_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

Solution :

1. *Comme $R \in L^2(I \times I)$, on sait par Fubini que, pour presque tout $t \in I$, l'application $s \to R(s,t)$ est dans $L^2(I)$. Comme $x_n \in L^2(I)$, $s \to R(s,t)u_n(s)$ est dans $L^1(I)$ pour presque tout $t \in I$, et donc $v_n(t)$ est bien défini pour presque tout $t \in I$. De plus, par Cauchy-Schwarz, puis Fubini,*

$$\int_0^1 (v_n(t))^2 dt \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 (R(s,t))^2 ds\right)\left(\int_0^1 x_n^2(s) ds\right) dt \leq \int_0^1 \int_0^1 (R(s,t))^2 ds dt < +\infty.$$

Donc v_n est bien dans $L^2(I)$.

De plus, comme, pour presque tout $t \in I$, l'application $s \to R(s,t)$ est dans $L^2(I)$, on a par définition de la convergence faible :

$$\lim_n \int_0^1 R(s,t)x_n(s)ds = \lim_n \langle R(\cdot,t), x_n\rangle_{L^2} = \langle R(\cdot,t), x\rangle_{L^2} = v(t).$$

2. *Notons que, par Cauchy-Schwarz, et pour tout $t \in I$ tel que 'application $s \to R(s,t)$ est dans $L^2(I)$:*

$$\begin{aligned}(v_n(t) - v(t))^2 &\leq \left(\int_0^1 (R(s,t))^2 ds\right)\left(\int_0^1 (x_n - x(s))^2 ds\right)\\ &\leq (\|x_n\| + \|x\|)^2 \int_0^1 (R(s,t))^2 ds \leq 4\int_0^1 (R(s,t))^2 ds,\end{aligned}$$

où, d'après Fubini, la fonction à droite est dans $L^2(I)$ puisque $R \in L^2(I \times I)$. On peut utiliser le théorème de convergence dominée (la converge venant de la question précédente) pour conclure que

$$\lim_n \int_0^1 (v_n(t) - v(t))^2 dt = 0.$$

Donc (v_n) tend en fait vers v dans $L^2(I)$.

3. *L'application T est bien définie (voir la question (1)), linéaire. Montrons que T est continu : on reprend les calculs au-dessus. On a*

$$\begin{aligned}\|T(x)\|^2 = \int_0^1 (T(x)(t))^2 dt &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 (R(s,t))^2 ds\right)\left(\int_0^1 x^2(s) ds\right) dt\\ &\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 (R(s,t))^2 ds dt\right)\|x\|^2.\end{aligned}$$

Donc T est continu. Montrons que T est compact. Soit (x_n) une suite de H telle que $\|x_n\| \leq 1$ pour tout n. Il existe une sous-suite (notée encore (x_n) pour simplifier) qui converge faiblement dans L^2 vers un $x \in L^2(I)$. D'après les questions précédentes, on sait que $v_n := T(x_n)$ converge dans $L^2(I)$ vers $v := T(x)$. Cela montre que T est compact.

4. *Par définition, on a, pour tout $x, y \in H$,*

$$\begin{aligned}\langle T^*(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle &= \int_0^1 x(t)\left(\int_0^1 R(s,t)y(s)ds\right) dt\\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 R(s,t)x(t)dt\right) y(s)ds,\end{aligned}$$

d'après Fubini (que l'on peut appliquer ici puisque $R \in L^2(I \times I)$, $x, y \in L^2(I)$. Comme l'égalité ci-dessus est vraie pour tout y, on peut conclure que, pour presque tout $t \in I$,

$$T^*(x)(s) = \int_0^1 R(s,t)x(t)dt.$$

C'est-à-dire que l'opérateur est de la même forme que T, mais avec $(s,t) \to R(t,s)$ au lieu de $R(s,t)$.

5. *Comme $R(s,t) = \min\{s,t\}$, on a, pour $x \in H$ et $z = T(x)$,*

$$(*) \qquad z(t) = \int_0^1 \min\{s,t\} x(s)ds = \int_0^t sx(s)ds + t\int_t^1 x(s)ds.$$

Comme $x \in H$, les fonctions $t \to \int_0^t sx(s)ds$ et $t \to \int_t^1 x(s)ds$ sont dans $H^1(I)$, et donc z est $H^1(I)$ (puisque l'application $t \to t$ est C^1 sur $[0,1]$). De plus, pour presque tout $t \in I$,

$$(**) \qquad z'(t) = tx(t) + \int_t^1 x(s)ds - tx(t) = \int_t^1 x(s)ds.$$

A nouveau, l'application $t \to \int_t^1 x(s)ds$ est dans $H^1(I)$, donc z' est également dans $H^1(I)$ avec, pour presque tout $t \in I$, $(z')'(t) = -x(t)$. Notons aussi que, d'après (*), $z(0) = 0$ et, d'après (**), $z'(1) = 0$.

6. *Soit λ une valeur propre de T et $x \in H$ un vecteur propre associé : $T(x) = \lambda x$. Posons $z = T(x)$.*

   Si $\lambda = 0$, alors $z = 0$ et, d'après la question précédente, $(z')' = -x = 0$, ce qui est impossible puisque x est une valeur propre. Donc $\lambda \neq 0$.

   On sait que $z \in H^1(I)$ avec $z' \in H^1(I)$ et $(z')' = -x$. L'égalité $z = T(x) = \lambda x$ implique alors que $x = z/\lambda$ est dans $H^1(I)$ avec x' également dans $H^1(I)$ et $(x')' = (z')'/\lambda = -x/\lambda$.

   Cela montre que x est de classe C^2. Supposons d'abord que $\lambda < 0$. Alors $x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ avec $\omega = 1/\sqrt{-\lambda}$. On sait que $x(0) = z(0)/\lambda = 0$ et $x'(1) = z'(1)/\lambda = 0$, ce qui implique que $A + B = 0$ et $A\omega e^{-\omega} - B\omega e^{\omega} = 0$. On en déduit facilement que $A = B = 0$, ce qui est impossible.

   On en déduit finalement que $\lambda > 0$ et on pose $\omega = \omega = 1/\sqrt{\lambda}$. Alors il existe A, B tels que $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, avec $x(0) = A = 0$ et $x'(1) = B\omega\cos(\omega) = 0$. Comme on doit avoir $B \neq 0$ pour que x soit non nul, on en déduit que $\cos(\omega) = 0$, soit $\omega = \pi/2 + k\pi$ (où $k \in \mathbb{N}$ car $\omega > 0$).

   Inversement, on voit facilement que les applications $t \to \sin((\pi/2+k\pi)t)$ sont des fonctions propres de T, de valeur propre associée $1/(\pi/2 + k\pi)^2$.

7. *Notons que T est un opérateur compact (question (3)) et auto-adjoint (question (4), puisque $R(s,t) = R(t,s)$). Par théorème de cours, on sait qu'on peut construire une base hilbertienne de H en prenant l'union des bases orthonormées de chaque espace propre de T (ces espaces propres sont de dimension finie puisque 0 n'est pas valeur propre). Ici, l'espace propre associé à la valeur propre $1/(\pi/2 + k\pi)^2$ est de dimension 1 et engendré par $t \to \sin((\pi/2 + k\pi)t)$. Cela prouve que la famille $(\sqrt{2}\sin((\pi/2 + k\pi)t))_{k\in\mathbb{N}}$ (qui, par un calcul facile est normé) est une base hilbertienne de H.*

Barème indicatif : Exercice 1 : points. Exercice 2 : points.