Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

CC2 du 11 avril 2016
Durée 1h20
Documents et calculatrice non autorisés.

Exercice 1 Les questions de cet exercise sont indépendantes.

(a) Calculer $I_1 := \int_0^{\pi/2} \sin(3x - \frac{\pi}{2})dx$.

(b) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$, calculer $I_2 := \int_1^e x^\alpha \ln(x)dx$.

(c) Calculer une primitive de la fonction $f(x) = (x + 2)e^{-2x}$.

Solution :

(a) On remarque qu'une primitive de la fonction continue $x \to \sin(3x - \frac{\pi}{2})$ *est la fonction* $x \to -\frac{1}{3}\cos(3x - \frac{\pi}{2})$*. Donc*

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sin(3x - \frac{\pi}{2})dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x - \frac{\pi}{2})\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}\left(\cos(\pi) - \cos(-\pi/2)\right) = \frac{1}{3}.$$

(b) On fait une intégration par parties en posant $u'(x) = x^\alpha$, $v(x) = \ln(x)$*, d'où* $u(x) = x^{1+\alpha}/(1 + \alpha)$, $v'(x) = 1/x$ *(on note que les fonctions* u *et* v *sont bien* C^1 *sur l'intervalle considéré). D'où*

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_1^e x^\alpha \ln(x)dx = \left[\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^\alpha}{1+\alpha}dx \\ &= \frac{e^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \left[\frac{x^{1+\alpha}}{(1+\alpha)^2}\right]_1^e = \frac{e^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \frac{e^{1+\alpha}}{(1+\alpha)^2} + \frac{1}{(1+\alpha)^2}. \end{aligned}$$

(c) On calcule, par exemple, la primitive F *qui s'annule en* 0 *:*

$$F(x) = \int_0^x (t + 2)e^{-2t}$$

On fait une intégration par parties, en posant $u'(t) = e^{-2t}$, $v(t) = t + 2$*, d'où* $u(t) = -e^{-2t}/2$, $v'(t) = 1$ *(on note que les fonctions* u *et* v *sont bien* C^1 *sur l'intervalle considéré) :*

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[-\frac{e^{-2t}}{2}(t+2)\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}dt \\ &= -\frac{e^{-2x}}{2}(x+2) + 1 + \left[-\frac{e^{-2t}}{4}\right]_0^x = -\frac{e^{-2x}}{2}(x+2) + 1 - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{4} \\ &= -e^{-2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{4}\right) + \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2 Les questions de cet exercise *ne sont pas* indépendantes, mais on pourra admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

(a) En utilisant la formule de Taylor-Young, donner le développement limité de la fonction $x \to \arctan(x)$ à l'ordre 3 en 0.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Déduire de la question précédente* le développement limité de la fonction $x \to \dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre n en 0.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler sans justification la dérivée de la fonction $x \to \arctan(x)$ et déduire de la question précédente un développement limité de la fonction $x \to \arctan(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0.

Solution:

(a) Comme $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$, *on a* $\arctan''(x) = -2x/(1+x^2)^2$ *et* $\arctan'''(x) = (-2+6x^2)/(1+x^2)^3$. *Donc, comme* $\arctan$ *est de classe* C^∞, *on a, par Taylor-Young,*

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \arctan(0) + x\arctan'(0) + \frac{x^2}{2}\arctan''(0) + \frac{x^3}{6}\arctan'''(0) + x^3\epsilon(x)\\ &= x - \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x).\end{aligned}$$

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = 1 - x^{n+1}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On déduit de la question précédente (en divisant par* $(1-x)$*) que, pour* $x \neq 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Si on pose

$$\epsilon(x) := \frac{x}{1-x},$$

on a que $\epsilon(x) \to 0$ *lorsque* $x \to 0$, *ce qui donne le DL de* $1/(1-x)$ *à l'ordre* n *en* 0 *:*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\epsilon(x).$$

(d) *On rappelle que*
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
En remplaçant x *par* $-x^2$ *dans la question précédente, on a*
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^n x^{2n}\epsilon(-x^2).$$
Comme $(-1)^n\epsilon(-x^2) \to 0$ *lorsque* $x \to 0$*, la relation ci-dessus n'est rien d'autre que le DL de* $1/(1+x^2)$ *à l'ordre* $2n$ *en* 0*. Par théorème de cours on sait que le DL à l'ordre* $2n+1$ *en* 0 *de la primitive* arctan *de* $1/(1+x^2)$ *est donné par*
$$\arctan(x) = \arctan(0) + \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + x^{2n+1}\epsilon(x),$$
où $\epsilon(x) \to 0$ *lorsque* $x \to 0$*. Comme* $\arctan(0) = 0$*, on obtient finalement :*
$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + x^{2n+1}\epsilon(x),$$

Exercice 3 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g(x) = \sup_{a\in\mathbb{R}} \left\{g(a) + (x-a)g'(a)\right\}.$$

Solution : On rappelle que, d'après le cours, on a, pour tout $x, a \in \mathbb{R}$,
$$g(x) \geq g(a) + (x-a)g'(a).$$
Donc, comme cela est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$g(x) \geq \sup_{a\in\mathbb{R}} \{g(a) + (x-a)g'(a)\}.$$
Inversement, pour tout $y \in \mathbb{R}$*, on a*
$$\sup_{a\in\mathbb{R}} \{g(a) + (x-a)g'(a)\} \geq g(y) + (x-y)g'(y).$$
En choisissant $y = x$*, cela donne*
$$\sup_{a\in\mathbb{R}} \{g(a) + (x-a)g'(a)\} \geq g(x).$$
Donc on a démontré l'égalité voulue: pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g(x) = \sup_{a\in\mathbb{R}} \{g(a) + (x-a)g'(a)\}.$$

Barème indicatif :