Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

Feuille 5 de TD
Fonctions de 2 variables réelles
Exercices supplémentaires

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y), \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2), \qquad k(x,y) = f(xy)$$

Exercice 7 Soit $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ et $g(x,y) = \arctan x - \arctan y$.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
3. Simplifier f à l'aide de g.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \text{ si } |x| > |y| \\ (x,y) \mapsto y \text{ si } |x| < |y| \\ (x,y) \mapsto 0 \text{ si } |x| = |y| \end{cases}$$

Étudier la continuité de f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

Exercice 9 Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{l} f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0 \end{array}$$

Étudier la continuité de f. Montrer que f est de classe C^1.

Exercice 10 (Contre-exemple au théorème de Schwarz)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$. On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $g(x,y) = r^2 f(\theta)$ avec $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ en fonction de f. En déduire les valeurs de $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$. Construire un exemple précis (donner $g(x,y)$ en fonction de x et y) pour lequel ces deux dérivées sont distinctes.

Exercice 11 (Contre-exemple au théorème de Schwarz) Soit $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.