Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

Examen du 01/06/2016
Durée 2h00
Documents et calculatrice non autorisés.

Questions de cours.

(a) Soient (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) quatre suites réelles. On suppose que $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$. Rappeller la définition de $a_n \sim b_n$ et démontrer que $a_n c_n \sim b_n d_n$.

Dans les deux questions suivantes, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante.

(b) Démontrer que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right| \leq \frac{|f(0)| + |f(1)|}{n}.$$

(c) Rappeler la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann et démontrer que f est intégrable au sens de Riemann.

Exercice 1

(a) Déterminer la limite $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sin(x))^2} \right)$.

(b) Déterminer une primitive de la fraction rationelle $\dfrac{4-x}{1+x-2x^2}$ sur l'intervalle $]-1/2, 1[$.
(Indication : bien vérifier le résultat de la décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples).

(c) En utilisant un changement de variables approprié, calculer $\displaystyle \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$.

Tourner la page S.V.P.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant les relations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(0,y) = \sin(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_a(t) = f(t, ae^{2t}) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Calculer la dérivée de la fonction $t \to g_a(t)$ et en déduire que $g_a(t) = \sin(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Calculer alors $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[0,1]$.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)^{1/n} \leq \max_{x\in[0,1]} f(x).$$

(b) Soient $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$ et $a, b \in [0,1]$ avec $a < b$. On suppose que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)^{1/n} \geq (b-a)^{1/n} m.$$

(c) (plus délicat) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)^{1/n} = \max_{x\in[0,1]} f(x).$$

Barème indicatif : Question de cours = 5 points, Exercice 1 = 6 points, Exercice 2 = 4 points, Exercice 3 = 5 points.