**Université Paris Dauphine**
**DUMI2E 1e année**
**Analyse 2 — 2015-2016**

**Examen du 01/06/2016**
Durée 2h00
Documents et calculatrice non autorisés.

**Questions de cours.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

(a) Soient $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ et $(d_n)$ quatre suites réelles. On suppose que $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$. Rappeller la définition de $a_n \sim b_n$ et démontrer que $a_n c_n \sim b_n d_n$.

Dans les deux questions suivantes, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante.

(b) Démontrer que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right| \leq \frac{|f(0)| + |f(1)|}{n}.$$

(c) Rappeler la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann et démontrer que $f$ est intégrable au sens de Riemann.

**Exercice 1**

(a) Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sin(x))^2} \right)$.

(b) Déterminer une primitive de la fraction rationnelle $\dfrac{4-x}{1+x-2x^2}$ sur l'intervalle $]-1/2, 1[$.
(Indication : bien vérifier le résultat de la décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples).

(c) En utilisant un changement de variables approprié, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$.

*Solution:*

*(a) Notons que*

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sin(x))^2} = \frac{(\sin(x))^2 - x^2}{x^2 \sin(x)}.$$

*On rappelle le DL de* $\sin(x)$ *en* $0$ *à l'ordre 3 : on a*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^3 \epsilon(x) = x \left( 1 - \frac{x^2}{6} + x^2 \epsilon(x) \right),$$

*où* $\epsilon(x) \to 0$ *si* $x \to 0$. *Donc (d'après la proposition sur le produit de DL, ici* $1 - \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x)$*) on a*

$$(\sin(x))^2 = x^2 \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^2 + x^2\epsilon(x) \right\} = x^2 \left\{ 1 - \frac{x^2}{3} + x^2\epsilon(x) \right\}.$$

*On en déduit que*

$$(\sin(x))^2 - x^2 = -\frac{x^4}{3} + x^4\epsilon(x),$$

*c'est-à-dire que* $(\sin(x))^2 - x^2 \sim -\frac{x^4}{3}$ *lorsque* $x \to 0$ *(par résultat du cours sur le calcul d'équivalents).*

*D'autre part,* $\sin(x) \sim x$ *lorsque* $x \to 0$*, donc, par résultat du cours sur le produit d'équivalents, on a* $x^2(\sin(x))^2 \sim x^4$ *lorsque* $x \to 0$. *On en déduit que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^2 - x^2}{x^2 \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{3}}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

*En conclusion,*

$$\lim_{x\to 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sin(x))^2} \right) = -\frac{1}{3}.$$

(b) *On remarque que* $1 + x - 2x^2 = (1-x)(2x+1)$. *Le théorème de décomposition des fractions rationnelles affirme alors qu'il existe des constantes* $a, b \in \mathbb{R}$ *telles que*

$$\frac{4-x}{1+x-2x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{2x+1}$$

*(comme le degré du numérateur est inférieur strict au degré du dénominateur, le quotient du numérateur par le dénominateur est nul). On multiplie les deux membres de l'égalité par* $1-x$ *et on prend* $x = 1$ *: cela donne* $a = 1$. *On multiplie les deux membres de l'égalité par* $2x+1$ *et on prend* $x = -1/2$ *: cela donne* $b = 3$. *D'où*

$$\frac{4-x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{3}{2x+1}$$

*On en déduit une primitive de la fraction rationnelle sur l'intervalle ]-1/2,1[ :*

$$-\ln(1-x) + \frac{3}{2}\ln(2x+1) \qquad \left( = \ln\left( \frac{(2x+1)^{3/2}}{1-x} \right) \right).$$

(c) *On veut faire le changement de variable* $u = \sqrt{t}$*, soit* $t = u^2$. *On remarque que* $\phi : [0,1] \to [0,1]$ *qui à* $u \in [0,1]$ *associe* $\phi(x) = u^2$ *est continue, bijective, de classe* $C^1$ *sur* $[0,1]$. *On a alors* $u^2 = t$, $2udu = dt$ *et donc*

$$\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{u^2}{1+u}2udu = 2\int_0^1 \frac{u^3}{1+u}du$$

*(car* $u \geq 0$ *et donc* $(\sqrt{u})^2 = |u| = u$*). Notons que*

$$\frac{u^3}{1+u} = \frac{(u+1)(u^2-u+1)-1}{1+u} = u^2 - u + 1 - \frac{1}{1+u}.$$

*Donc*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{u^3}{1+u}du &= \int_0^1 u^2-u+1-\frac{1}{1+u}\ du = \left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln(1+u)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln(2)=\frac{5}{6}-\ln(2).\end{aligned}$$

*D'où*

$$\int_0^1 \frac{u^3}{1+u}du = \frac{5}{3}-2\ln(2).$$

**Exercice 2** Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ vérifiant les relations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+2y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \qquad f(0,y)=\sin(y) \quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

(a) Pour $a\in\mathbb{R}$, on pose

$$g_a(t)=f(t,ae^{2t}) \qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Calculer la dérivée de la fonction $t\to g_a(t)$ et en déduire que $g_a(t)=\sin(a)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

(b) Calculer alors $f(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

*Solution :*

*(a) Par théorème de dérivation des fonctions composées, on a*

$$g_a'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,ae^{2t}).1+\frac{\partial f}{\partial y}(t,ae^{2t})2ae^{2t}=\frac{\partial f}{\partial x}(t,ae^{2t})+2ae^{2t}\frac{\partial f}{\partial y}(t,ae^{2t})=0,$$

*la dernière égalité étant obtenue en utilisant l'hypothèse sur $f$ avec $x=t$ et $y=ae^{2t}$. Donc $g_a$ est constante et vaut $g_a(t)=g_a(0)=f(0,a)=\sin(a)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.*

*(b) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On cherche $(t,a)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(t,ae^{2t})=(x,y)$. Cela signifie que $t=x$ et $a=ye^{-2t}=ye^{-2x}$. Donc*

$$f(x,y)=f(t,ae^{2t})=g_a(t)=\sin(a)=\sin(ye^{-2x}).$$

*En conclusion*

$$f(x,y)=\sin(ye^{-2x}) \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

**Exercice 3** Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[0,1]$.

(a) Montrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)^{1/n} \leq \max_{x\in[0,1]} f(x).$$

(b) Soient $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$ et $a, b \in [0,1]$ avec $a < b$. On suppose que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)^{1/n} \geq (b-a)^{1/n} m.$$

(c) (plus délicat) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)^{1/n} = \max_{x\in[0,1]} f(x).$$

*Solution :*

*(a) Comme $f$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$, $f$ est bornée et atteint ses bornes. Posons*

$$M := \max_{y\in[0,1]} f(y).$$

*Comme $f$ est positive, on a, pour tout $x \in [0,1]$,*

$$0 \leq f(x) \leq M.$$

*Donc, comme l'application $s \to s^n$ est croissante sur $[0,+\infty[$, on a*

$$0 \leq (f(x))^n \leq M^n \qquad \forall x \in [0,1].$$

*D'où*

$$0 \leq \int_0^1 (f(x))^n dx \leq \int_0^1 M^n dx = M^n.$$

*Alors, comme l'application $s \to s^{1/n}$ est croissante sur $[0,+\infty[$, on a*

$$\left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)^{1/n} \leq M.$$

*(b) Comme*

$$f(x) \geq m \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b],$$

*et que $s \to s^n$ sur $[0,+\infty[$ est croissante, on a*

$$(f(x))^n \geq m^n \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b].$$

*On intègre sur $[a,b]$ pour obtenir*

$$\int_a^b (f(x))^n dx \geq \int_a^b m^n dx = (b-a)m^n.$$

*Comme $f \geq 0$ sur $[a,b]$, on a*

$$\int_0^a (f(x))^n dx \geq 0 \text{ et } \int_b^1 (f(x))^n dx \geq 0.$$

*Donc*

$$\int_0^1 (f(x))^n dx = \int_0^a (f(x))^n dx + \int_a^b (f(x))^n dx + \int_b^1 (f(x))^n dx \geq \int_a^b (f(x))^n dx.$$

*En utilisant le fait que* $s \to s^{1/n}$ *est croissante sur* $[0, +\infty[$, *on déduit que*

$$\left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)^{1/n} \geq \left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{1/n} \geq (b-a)^{1/n} m,$$

*ce qui est l'inégalité demandée.*

(c) *On raisonne par l'absurde en supposant que le résultat est faux. Alors il existe* $\epsilon > 0$ *tel que, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $n_k \in \mathbb{N}^*$, *avec* $n_k \geq k$, *tel que*

$$\left|\left(\int_0^1 (f(x))^{n_k} dx\right)^{1/n_k} - M\right| > \epsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

*Or, d'après la question (a), on a*

$$\left(\int_0^1 (f(x))^{n_k} dx\right)^{1/n_k} \leq M.$$

*Donc*

$$(*) \qquad \left(\int_0^1 (f(x))^{n_k} dx\right)^{1/n_k} < M - \epsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

*En particulier, on a* $M - \epsilon \geq 0$. *Comme* $f$ *est continue sur l'intervalle fermé borné* $[0, 1]$, *il existe* $x_0 \in [0, 1]$ *tel que* $f(x_0) = M$. *Par continuité de* $f$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon/2$. *Alors*

$$f(x) \geq f(x_0) - \epsilon/2 = M - \epsilon/2 \qquad \forall x \in [0,1],\ |x - x_0| \leq \eta.$$

*Posons* $a := \max\{0, x_0 - \eta\}$ *et* $b := \min\{1, x_0 + \eta\}$. *Remarquons que* $a < b$ *puisque* $a \leq x_0$, *avec égalité seulement si* $x_0 = 0$, *et* $b \geq x_0$, *avec égalité seulement si* $x_0 = 1$. *De plus, par définition,*

$$f(x) \geq M - \epsilon/2 \geq 0 \qquad \forall x \in [a, b].$$

*D'après la question précédente on a donc*

$$(**) \qquad \left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)^{1/n} \geq (b-a)^{1/n}(M - \epsilon/2) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Comme* $\lim_{n\to+\infty} (b-a)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \exp\{(1/n)\ln(b-a)\} = 1$ *et comme* $n_k \to +\infty$, *il existe* $K \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$M - \epsilon < (b-a)^{1/n_k}(M - \epsilon/2) \qquad \forall k \geq K.$$

*Il y a donc une contradiction entre* $(*)$ *et* $(**)$ *pour* $k \geq K$. *On peut donc conclure que notre hypothèse de départ est fausse et que*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)^{1/n} = M = \max_{x\in[0,1]} f(x).$$