Université Paris Dauphine

Feuille d'exercices du cours d'Analyse 2
DUMI2E — Première année

La plupart des exercices de ce fascicule sont issus de recueil d'exercices disponibles sur internet, souvent avec les corrections.

Le site *exo7.emath* couvre le programme du cours (et très largement au-delà), propose des exercices avec corrections, des cours (polycopié et MOOCS), etc... Il est hébergé par la SMAI et la SMF. Adresse du site :

- http://exo7.emath.fr/

Quelques exercices étant un peu plus délicats, des indications, écrites en sens inverse, sont suggérées. Il est conseillé au lecteur d'essayer dans un premier temps de résoudre ces exercices sans tenir compte des indications.

Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

Feuille 1 de TD
Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Exercice 1

1. Calculer

$$(i)\ \arcsin(\sin(1)), \qquad (ii)\ \arcsin(\sin(\frac{19\pi}{5})), \qquad (iii)\ \arctan(\tan(\frac{16\pi}{5})).$$

2. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et les calculer :

$$(i)\ x \to \sin(\arcsin(x)), \qquad (ii)\ x \to \arcsin(\sin(x)), \qquad (iii)\ x \to \tan(\arctan(x)),$$
$$(iv)\ x \to \arctan(\tan(x)).$$

3. En s'inspirant de la question ci-dessus, calculer $\cos(\arctan(x))$ et $\sin(\arctan(x))$ pour x réel donné.

Exercice 2

1. Calculer $\arccos(x) + \arcsin(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
2. En déduire la solution de l'équation $\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \pi/2$.

Exercice 3 On pose $x = \arctan(\sqrt{2})$.

1. Montrer que $0 < \pi - 2x < \pi/2$ et calculer $\tan(\pi - 2x)$.
2. En déduire que $\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$.

Exercice 4 Soit $f(x) = \text{argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est de classe C^1 sur son domaine de définition.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire une expression simple de f.

Exercice 5

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan(x) = \pi/2$.
2. Montrer que la fonction $h(x) = \arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = \pi/8$. En utilisant la première question, calculer x et en déduire la valeur de $\tan(\pi/8)$.
4. Calculer de même $\tan(\pi/12)$.

Exercice 6 Montrer que l'équation suivante possède une unique solution dans $]0, 1/2[$ et la calculer : $\arctan(2x) + \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

Feuille 2 de TD
Développements limités

Exercice 1 Donner le développement limité en x_0 à l'ordre n des fonctions:

1. $f_1(x) = (\ln(1+x))^2 \quad (n = 4 \ , \ x_0 = 0)$
2. $f_2(x) = \ln(\sin(x)) \quad (n = 3 \ , \ x_0 = \frac{\pi}{4})$
3. $f_3(x) = e^{\sin(x)} \quad (n = 3 \ , \ x_0 = 0)$
4. $f_4(x) = \cos(x).\ln(1+x) \quad (n = 3 \ , \ x_0 = 0)$
5. $f_5(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}} \quad (n = 3 \ , \ x_0 = 0)$
6. $f_6(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2})) \quad (n = 2 \ , \ x_0 = -\frac{\pi}{2})$
7. $f_5(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}} \quad (n = 2 \ , \ x_0 = 0)$

Exercice 2 (Taylor-Young)

1. Soit: $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
   Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 pour $x_0 = 0$.
   En déduire la position de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ par rapport au graphe de g, au voisinage de 0.
2. Soit: $h(x) = \ln^2(1+x)$.
   Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 pour $x_0 = 0$.
3. On considère la fonction f définie sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ par: $f(x) = \dfrac{h(x) - x^2}{x - g(x)}$.
   Déduire des questions précédentes que f admet une limite lorsque x tend vers 0.

Exercice 3 Calculer les limites suivantes:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

5. $\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}$, avec $a > 0$.

Exercice 4 [Rattrapage 2008] Calculer, si elles existent, les limites

$$\lim_{x \to 0} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

où la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$f(x) := \frac{x^3 + \sin(2x) - 2\sin x}{\arctan(x^3) - (\arctan x)^3}.$$

Exercice 5 Déterminer les valeurs du paramètre réel a telles que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} + e^x - 2}{x^2}$$

existe et est finie.

Exercice 6 Calculer le DL d'ordre 5 de la fonction

$$\log(1 + \sin x)$$

au voisinage du point $x = 0$.

Exercice 7 Soit g la fonction $x \to \dfrac{\arctan\, x}{(\sin\, x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice 8 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$.
En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x \to \ln(1 + x)$, estimer la différence $|u_n - \ln(2)|$ et en déduire que $(u_n)_n$ est une suite qui converge vers $\ln 2$.

Exercice 9 Soit $f(x) = 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$. Ecrire le développement limité de f à l'ordre 3 au point $x_0 = 1$ et déterminer le ou les points ξ qui réalisent l'égalité dans la formule de Taylor-Lagrange quand on développe $f(x)$ autour de $x_0 = 1$ et on prend après $x = 0$

Exercice 10 Soit $f(x) = \sin(x^2) - (\sin x)^2$. Déterminer si le point $x_0 = 0$ est un point de minimum ou de maximum local de f. Préciser également s'il s'agit d'un minimum ou maximum global.
Mêmes questions pour les fonctions $g(x) = \arctan(x^3) - (\arctan x)^3$ et $h(x) = (\arctan x)^2 - x^2$.

Exercice 11 (Calcul d'asymptotes) Déterminer si les fonctions suivantes admettent une asymptote en $+\infty$, en $-\infty$. Si oui, la calculer et déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

$$(i)\ f_1(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \qquad (ii)\ f_2(x) = \frac{x+1}{1 + e^{1/x}}$$

$$(iii)\ f_3(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$$

Exercice 12 (Etude locale d'une courbe) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} \; .$$

1. Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en zéro.

2. En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.

3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.

Exercice 13 (Position relative d'une courbe et de sa tangente) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

Exercice 14 (Application des formules de Taylor)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $|f(x)| \leq C_0$ et $|f''(x)| \leq C_2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (où C_0 et C_2 sont des constantes fixées).

   (i) Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 entre x et $x+2a$ (où $a > 0$), montrer que $|f'(x)| \leq C_0/a + aC_2$.

   (ii) En déduire que $|f'(x)| \leq 2\sqrt{C_1 C_2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f^{(n)}(x)| \leq n!\; C^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer alors que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on pourra d'abord montrer que $f(x) = 0$ si $x \in]-1/C, 1/C[$).

Exercice 15 (Recherche d'équivalent) Calculer des équivalents simples des suites suivantes :

$$(i)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (n \ln(1+\frac{1}{n}))^n, \qquad (ii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}$$

$$(iii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1.$$

Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

Feuille 3 de TD
Convexité

Exercice 1 Déterminer si les fonctions suivantes sont convexes ou concaves sur l'intervalle considéré :

1. $f_1(x) = |x|^{3/2}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f_2(x) = |x|^{1/2}$ sur $\mathbb{R}$
3. $f_3(x) = |x|^{1/2}$ sur $[0, +\infty[$
4. $f_4(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$
5. $f_5(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_6(x) = \log_4 x$ sur $[0, +\infty[$
7. $f_7(x) = \sin x$ sur $[0, 3]$
8. $f_8(x) = \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 La fonction $x \mapsto x\, \ln(\ln x)$ définie sur $]1, +\infty[$ est-elle convexe sur $]1, +\infty[$? Si ce n'est pas le cas, donner le plus grand intervalle sur lequel elle est convexe.

Exercice 3 Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité arithmético-géométrique:

$$(x_1\, x_2 \ldots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

1. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ concave. Montrer que
$$f(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}) \geq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer que: $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \leq x$ et $\forall x \notin [0, 1]$, $f(x) \geq x$.

Exercice 6 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ convexe.
Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite finie ou infinie lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 7 Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Montrer que si f est convexe et concave sur I alors f est affine sur I.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.
Montrer que si f est majorée alors elle est constante.
On pourra raisonner par contraposée.

Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

Feuille 4 de TD
Intégration

Exercice 1 (Calcul direct) Déterminer les primitives des fonctions sivantes :

$$(a)\ x(x^3+1); \quad (b)\ \frac{1}{x-3}; \quad (c)\ \sin(2x-\frac{\pi}{6}); \quad (d)\ \frac{1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{2})}$$

$$(e)\ \sin^2(x); \quad (f)\ \cos^4(x); \quad (g)\ \frac{1}{(2x+5)^3}; \quad (h)\ \tan^2(x)$$

Exercice 2 Sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on considère F la primitive de $\frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$ telle que $F(0) = 0$ et G la primitive de $\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$ telle que $G(0) = 0$. Calculer $F+G$ et $F-G$ et en déduire F et G.

Exercice 3 (Relation de Chasles)

1. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq n$. Calculer $\displaystyle\int_m^n E(x)dx$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 (x+1)|x|\ dx$.

Exercice 4 (Intégration par parties) Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties.

$$(a)\ (x+1)e^{-x}; \quad (b)\ \ln(x); \quad (c)\ (x^2+x+1)e^{2x}; \quad (d)\ e^x \sin x; \quad (e)\ x \arctan x; \quad (f)\ \ln^2(x);$$

$$(g)\ e^{-2x}\cos^2 x; \quad (h)\ \sqrt{x}\ln(x); \quad (i)\ \sin(\ln(x))$$

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^1 t^2 e^t dt; \qquad (b) \int_0^{\pi/2} (\cos t)\ln(1+\cos t)dt \qquad (c) \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$$

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :
$I = \displaystyle\int_1^e \cos(\pi \log x)dx,\ J = \int_1^e \sin(\pi \log x)dx.$

Exercice 7 Déterminer une primitive de xe^x puis calculer les intégrales suivantes :
$I = \displaystyle\int_0^\pi xe^x \sin 2x dx,\ I = \int_0^\pi xe^x \cos 2x dx.$

Exercice 8 (Changement de variables) Calculer les primitives des fonctions suivantes en utilisant, si nécessaire, un changement de variable :

$$(a)\ \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} \qquad (b)\ \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad (c)\ \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}dx \qquad (d)\ \frac{1}{\sin(x)}dx.$$

Indication pour le (d) : multiplier numérateur et dénominateur de la fraction par $\sin(x)$

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période T. Montrer que

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \qquad \forall a \in \mathbb{R}\ .$$

Exercice 10 Soit $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x dx}{3+\sin^2 x}$. Utiliser le changement de variable $t = \pi - x$, puis déterminer la valeur de I.

Exercice 11 (Examen 2008) Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

et dire si sa valeur est supérieure, inférieure, ou égale à $3/2$.

Indication: Poser $u = \sqrt{e^x - 1}$.

Exercice 12 Calculer une primitive de la fonction

$$f(x) = (1+x^2)^{3/2}.$$

Indication: poser $x = \sinh(u)$.

Exercice 13 (Fractions rationelles) Décomposer chacune des fractions suivantes en éléments simples et en calculer une primitive :

$$(a)\ \frac{2x+3}{x^2-4} \qquad (b)\ \frac{3x+7}{x^2-3x+2} \qquad (c)\ \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$(d)\ \frac{x^2-1}{x^3+4x^2+5x} \qquad (e)\ \frac{x^3+2}{x^2+3x+2} \qquad (f)\ \frac{2x-5}{x(x-1)(x+3)}$$

Exercice 14 Déterminer une primitive de $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ puis utiliser un changement de variable adéquat pour obtenir la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\tan t}$.

Exercice 15 On note $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.
1. Etablir un relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$ (le coefficient C_n^k, qu'on écrit aussi $\binom{n}{k}$, est donné par $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ et est celui qui apparaît dans le binôme de Newton et dans le triangle de Pascal).

Exercice 16 On note F_n une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\frac{1}{(1+x^2)^n}$.
1. En intégrant par parties $F_n - F_{n-1}$, trouver une relation de récurrence entre F_n et F_{n-1} (pour $n \geq 2$). Donner les expressions de F_1, F_2, F_3.
2. On pose $I_n = \int_0^u \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$. Ecrire la relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} et donner la valeur de I_n.

Exercice 17 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a < b$), telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer que $f(x) = 0$ pour $x \in [a, b]$.

Exercice 18 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a < b$), telle que $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$. Montrer que f garde un signe constante sur $[a, b]$.

Exercice 19 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ telle que $f(c) = c$.

Exercice 20 Soient $0 < a < b$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer la limite $\lim_{h \to 0^+} \int_{ah}^{bh} \frac{f(x)}{x} dx$.

Exercice 21 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, une fonction continue non identiquement nulle. On suppose qu'il existe un entier n tel que, pour tout entier naturel k tel que $k \leq n$, on a $\int_a^b x^k f(x)dx = 0$. On souhaite prouver que, dans l'intervalle $[a, b]$, il existe au moins $n + 1$ points où f s'annule en changeant de signe.

1. Traiter le cas $n = 0$.
2. Traiter le cas $n = 1$.
3. Traiter le cas général.

Exercice 22 (Sommes de Riemann) Déterminer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2} \qquad (b) \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$$

Exercice 23 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Monter que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0 \, .$$

Indication: utiliser la continuité uniforme de f

Exercice 24 Montrer que $1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$. En déduire que la suite (u_n) définie par :

$$u_n = -n + \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}$$

a une limite et la calculer.

Exercice 25 Montrer que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$. En déduire que la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

a une limite et la calculer.

Exercice 26

1. Montrer que, pour tout $i \geq 2$, on a

   $$\int_{i-1}^{i} \ln(x)dx \leq \ln(i) \leq \int_{i}^{i+1} \ln(x)dx$$

   et en déduire que, pour tout $n \geq 2$,

   $$\int_{1}^{n} \ln(x)dx \leq \ln(n!) \leq \int_{2}^{n+1} \ln(x)dx$$

2. En déduire que $\ln(n!)$ est équivalent à $n\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 27 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x))^n dx = 0 \ .$$

Exercice 28 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie a en $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x)dx = a \ .$$

Exercice 29 (Intégrales de Wallis) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^n dx$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (I_n) est strictement décroissante.
2. Montrer que (I_n) converge vers 0.

   Dans la suite, on va chercher à déterminer un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$.
3. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
4. Montrer que

   $$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

5. Montrer que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
6. Montrer que $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.
7. En déduire finalement que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

Feuille 5 de TD
Fonctions de 2 variables réelles

Exercice 1 (Représentation graphique) Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer le domaine de définition de f et dessiner les ensembles de niveau $\{(x,y) \in D_f \text{ avec } f(x,y) = k\}$ pour les valeurs de k données.

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2},\ k=0,\ k=-1, \qquad f(x,y) = \frac{xy-x+y}{xy},\ k=1,\ k=2,$$

$$f(x,y) = x - y - |x-y|,\ k \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 Soient f, g, h les fonctions définies par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et} \qquad h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions f, g et h sont-elles continues en $(0,0)$?

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculer les dérivées partielles de f à l'ordre 1 et 2 en dehors de $(0,0)$.

Exercice 5 Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.
Même question pour $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.