Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

CC1 — 22/02/2016
Durée 1h15
Documents et calculatrice non autorisés.

Exercice 1

(a) Calculer $\arccos(x) + \arcsin(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

(b) Calculer le développement limité de la fonction $f(x) = e^x\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 2 Soit $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ et $f(x) = \operatorname{argch}(g(x))$.

(a) Donner le domaine de définition de g et étudier ses variations.

(b) Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$ et que f est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

(c) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

(d) En déduire une expression simple de $f(x)$ si $x > 0$.

Exercice 3 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et qu'il existe $M > 0$ tel que $|x^2 f''(x)| \leq M$ pour tout $x > 0$.

(a) Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que pour tout $x > 0$ il existe $\xi \in [ax, x]$ tel que

$$f(ax) = f(x) - (1-a)xf'(x) + \frac{(1-a)^2}{2}x^2 f''(\xi)$$

(b) Soient $a \in]0, 1[$, $x > 0$ et $\xi \in [ax, x]$. Montrer que

$$\left|x^2 f''(\xi)\right| \leq \frac{M}{a^2}.$$

(c) Conclure que $\lim_{x\to 0^+} xf'(x) = 0$.

Barème indicatif : Exercice 1 : 6 points. Exercice 2 : 7 points. Exercice 3 : 7 points.