**Université Paris Dauphine**
**DUMI2E**
**Année 2015-2016**

# ANALYSE 2

**P. Cardaliaguet**

Objectifs : Développements limités, intégrale de Riemann, un peu de calcul de primitives, calcul différentiel, dérivées partielles de fonctions de plusieurs variables.

Pré-requis : cours d'Analyse 1.

# Table des matières

**Notations**

Dans toute le polycopié, nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensembles des entiers naturels non nuls,
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Z}^*$ l'ensembles des entiers relatifs non nuls,
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels, $\mathbb{Q}^*$ l'ensembles des rationnels non nuls,
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^*$ l'ensembles des réels non nuls,
- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C}^*$ l'ensembles des nombres complexes non nuls,
- $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels,
- $\mathbb{C}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.
- Si $z$ est un nombre complexe, $\mathcal{R}e(z)$ désigne sa partie réelle tandis que $\mathcal{I}m(z)$ désigne sa partie imaginaire.

**Quelques lettres grecques fréquemment utilisées en mathématiques :**

| | Minuscule | Majuscule |
|---|---|---|
| alpha | $\alpha$ | $A$ |
| bêta | $\beta$ | $B$ |
| gamma | $\gamma$ | $\Gamma$ |
| delta | $\delta$ | $\Delta$ |
| epsilon | $\epsilon$ | $E$ |
| zéta | $\zeta$ | $Z$ |
| éta | $\eta$ | $N$ |
| théta | $\theta$ | $\Theta$ |
| kappa | $\kappa$ | $K$ |
| lambda | $\lambda$ | $\Lambda$ |
| mu | $\mu$ | $M$ |
| nu | $\nu$ | $N$ |
| xi | $\xi$ | $\Xi$ |
| pi | $\pi$ | $\Pi$ |
| rhô | $\rho$ | $R$ |
| sigma | $\sigma$ | $\Sigma$ |
| tau | $\tau$ | $T$ |
| phi | $\phi$ | $\Phi$ |
| khi | $\chi$ | $X$ |
| psi | $\psi$ | $\Psi$ |
| omega | $\omega$ | $\Omega$ |

# 1 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Cette partie (brève reprise du chapitre 6 du polycopié d'Analyse 1) est consacrée à l'analyse de quelques fonctions usuelles particulièrement utiles pour le calcul d'intégrales. Le chapitre ne présente pas de difficulté théorique *à condition de faire particulièrement attention aux domaines de définition des différentes fonctions.*

## 1.1 Formules trigonométriques usuelles

On rappelle que les applications sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$, infiniment différentiables et $2\pi-$périodiques. La fonction sin est impaire, cos est paire. On a les relations

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x), \qquad \cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x).$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \mathbb{Z} + \pi/2$, on pose $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On note que tan est $\pi-$périodique et impaire. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Z} + \pi/2\}, \qquad 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x).$$

On en déduit, pour les $x, y \in \mathbb{R}$ pour lesquels les expressions ont un sens :

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}, \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

## 1.2 Réciproques des fonctions trigonométriques

Nous commençons par les réciproques des fonctions sin, cos et tan sur les intervalles adéquats.

### 1.2.1 La fonction arcsin

La fonction $x \to \sin(x)$ est strictement croissante et continue de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$ et, par théorème des valeurs intermédiaires, est surjective sur cet intervalle. C'est donc une bijection et on appelle arc-sinus (noté arcsin) sa fonction réciproque.

**Proposition 1.1 (Propriétés de** arcsin**)** *La fonction* arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *est* ***continue, impaire et strictement croissante*** *sur* $[-1, 1]$. *De plus, elle est* ***dérivable*** *sur* $]-1, 1[$ *et*

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

**Preuve.** La première partie de la proposition (continuité et caractère strictement croissant) est une conséquence directe de la Proposition 38 du polycopié d'Analyse 1. Montrons que arcsin est impair : comme sin est impair, on a

$$\sin(-\arcsin(x)) = -\sin(\arcsin(x)) = -x = \sin(\arcsin(-x))$$

et donc, par injectivité de arcsin, $-\arcsin(x) = \arcsin(-x)$. La dérivabilité vient de la dérivabilité des fonctions réciproques (Proposition 49 du polycopié d'Analyse 1) qui nous assure que, comme $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$ pour tout $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$, on a, pour tout $x \in ]-1, 1[= \sin(]-\pi/2, \pi/2[)$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$, on a $|\cos(y)| = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$. Si $y \in ]-\pi/2, \pi/2[$, $\cos(y) > 0$ et alors $\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$. D'où, puisque, pour $x \in ]-1, 1[$, $\arcsin(x) \in ]-\pi/2, \pi/2[$, on a

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$\square$

### 1.2.2 La fonction arccos

La fonction cosinus est strictement décroissante et continue de $[0, \pi]$ dans son image $[-1, 1]$ : c'est donc une bijection entre ces deux intervalles et on appelle arc-cosinus (noté arccos) sa fonction réciproque.

**Proposition 1.2 (Propriétés de** arccos**)** *La fonction* $\arccos : [-1, -1] \to [0, \pi]$ *est* ***continue et strictement décroissante*** *sur* $[-1, 1]$. *De plus, elle est* ***dérivable*** *sur* $]-1, 1[$ *et*

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

**Preuve.** La démonstration de la première partie est identique à celle pour arcsin. Pour la dérivabilité, notons que $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$ pour $x \in ]0, \pi[$. Donc arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ qui est l'image directe de $]0, \pi[$ par cos, avec

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}.$$

Comme, pour $y \in ]0, \pi[$, $\sin(y) > 0$, on a sur $]0, \pi[$, $\sin(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)}$ et donc

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$\square$

### 1.2.3 La fonction arctan

La fonction $\tan : ]-\pi/2, \pi/2[ \to ]-\infty, +\infty[$ est strictement croissante, continue et surjective. C'est donc une bijection entre $]-\pi/2, \pi/2[$ et $]-\infty, +\infty[$. On appelle arc-tangente (noté arctan) sa fonction réciproque. Noter que

$$\arctan(0) = 0, \qquad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

**Proposition 1.3 (Propriétés de** arctan**)** *La fonction* arctan : $\mathbb{R} \to ]-\pi/2, \pi/2[$ *est* ***continue, impaire et strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}$. *Elle satisfait*

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

*De plus, elle est* ***dérivable*** *sur son domaine et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Preuve.** A nouveau, seul le dernier point pose problème. Par dérivabilité des fonctions réciproques, comme $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$ pour $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

### 1.2.4 Quelques relations

**Proposition 1.4** *Pour tout* $x \in [-1, 1]$,

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

*Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}\ \textit{signe}(x).$$

**Preuve.** Pour la première relation, on considère la fonction $f$ définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$. Cette fonction est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ avec

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

On en déduit que $f$ est une fonction constante. Pour trouver la valeur de cette constante, on calcule $f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \pi/2$.
Pour la seconde relation, on considère la fonction $g$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. La fonction $g$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ avec (par dérivée des fonctions composées)

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + (-\frac{1}{x^2})\frac{1}{1+(1/x)^2} = 0.$$

Donc $g$ est constante sur $]0, +\infty[$. Comme $\lim_{x\to0^+} g(x) = \arctan(0) + \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \pi/2$, cette constante est $\pi/2$. Cela donne le résultat pour les réel positifs. On étend le résultat aux réels négatifs en utilisant que la fonction arctan est impaire. □

## 1.3 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

### 1.3.1 Fonctions hyperboliques

On appelle sinus hyperbolique (noté sinh ou sh), cosinus hyperbolique (noté cosh ou ch), tangente hyperbolique (noté tanh ou th) et cotangente hyperbolique (noté cotanh ou coth) les fonctions suivantes : pour $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Pour $x \in R^*$,

$$\operatorname{cotanh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

On note la relation importante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

**Proposition 1.5** *1. Les fonctions* sinh, tanh *et* cotanh *sont impaires et* cosh *est paire.*

*2. Toutes ces fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition et*

$$\cosh' = \sinh \qquad \sinh' = \cosh \qquad \tanh' = 1 - \tanh^2 = \frac{1}{\cosh^2}$$
$$\operatorname{cotanh}' = \frac{-1}{\sinh^2}$$

La preuve de ces différents résultats ne présente aucune difficulté et est laissée en exercice.

### 1.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques

**Proposition 1.6** • *La fonction* sinh *est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

- *La fonction* cosh *est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.*
- *La fonction* tanh *est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.*

La preuve s'appuie, sans difficulté, sur le calcul des dérivées pour montrer la monotonie stricte.

**On peut donc considérer les bijections réciproques de ces trois fonctions que l'on notera argsh** $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**, argch** $: [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ **et argth** $: ]-1, 1[\to \mathbb{R}$**.**

**Proposition 1.7** *1. La fonction* argsh *est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

*2. La fonction* argch *est dérivable sur $]1, +\infty[$. Pour tout $x \in ]1, +\infty[$*

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$
$$\operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad (\textit{relation valable aussi en } 1)$$

*3. La fonction* argth *est impaire et dérivable sur $]-1, 1[$. Pour tout $x \in ]-1, 1[$*

$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$
$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln(\frac{1 + x}{1 - x})$$

La preuve est laissée en exercice.

## 2 Développement limités

Une application très importante des formules de Taylor est la notion de développement limité. Heuristiquement, une fonction $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ en un point $x_0$ si on peut remplacer, au voisinage de $x_0$ cette fonction par un polynôme de degré au plus $n$, l'erreur que l'on commet étant alors petite devant $(x - x_0)^n$.

Vu la grande facilité de manipulation des polynômes, les développements limités sont très utiles dès que l'on cherche à calculer des limites de fonctions, des équivalents, etc...

### 2.1 Rappels sur la notion de dérivée

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $x_0$ un point de $I$. On dit que $f$ est dérivable en $x_0$ si la limite suivante existe :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0,\, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Rappelons que, dans ce cas, $f$ est continue en $x_0$.

Lorsque l'intervalle n'est pas ouvert, il est parfois utile de parler de dérivée à droite ou à gauche, définies respectivement par :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) .$$

Rappelons qu'on dit que $f$ admet un *maximum local* en un point $x_0$ de $I$ s'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| \leq \eta$, on a $f(x) \leq f(x_0)$. De même, $f$ admet un maximum local en $x_0$ de $I$ s'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| \leq \eta$, on a $f(x) \geq f(x_0)$. Si $f$ admet un maximum ou un minimum en $x_0$, on dit que $x_0$ est un extremum de $f$.

Voici la condition nécessaire la plus classique pour déterminer les extrema locaux d'une fonction :

**Proposition 2.1** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0$ un point de $I$. On suppose que $f$ a un maximum local (ou un minimum local) en $x_0$ et que $f$ est dérivable en $x_0$. Alors $f'(x_0) = 0$.*

**Preuve :** Comme $f$ a un maximum local au point $x_0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \eta \ \Rightarrow\ f(x) \leq f(x_0) .$$

Alors, si $x \in I$ avec $x \in ]x_0, x_0 + \eta[$, on a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Par passage à la limite lorsque $x \to x_0$, cela entraîne que $f'(x_0) \leq 0$. De même, si $x \in I \cap ]x_0 - \eta, x_0[$, alors $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, ce qui entraîne que $f'(x_0) \geq 0$. Donc $f'(x_0) = 0$. □

On suppose dans le reste de cette partie que $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$.

**Théorème 2.2 (de Rolle)** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.*

*Alors il existe un point $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

**Preuve :** Si $f$ est constante sur $[a, b]$, alors $f'(x) = 0$ pour tout $x$ de $]0, 1[$. Dans ce cas, le théorème de Rolle est démontré avec $c$ un point quelconque de $]a, b[$.

Supposons que $f$ ne soit pas identiquement nulle. Il existe donc un point $x$ tel que $f(x) \neq f(a)$.

Supposons d'abord, que $f(x) > f(a)$. Comme $f$ est continue sur $[a, b]$, $f$ admet un maximum sur $[a, b]$ en un point $c \in [a, b]$. Par définition du maximum, on a $f(c) \geq f(x) > f(a)$, et donc $c \neq a$ et $c \neq b$ puisque $f(a) = f(b)$. Donc nous avons prouvé que $c$ appartient à l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors, comme $f$ a un maximum local en $c$ et que $f$ est dérivable en $c$, on a $f'(c) = 0$. Donc le théorème de Rolle est prouvé dans ce cas.

Si, au contraire, $f(x) < f(a)$, alors on fait le raisonnement symétrique en considérant un minimum de $f$ sur $[a, b]$ à la place d'un maximum. □

Une application très importante du théorème de Rolle est le théorème des accroissements finis :

**Théorème 2.3 (des accroissements finis)** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe un point $x_0 \in ]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \ .$$

**Preuve :** On considère la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [a, b], \ g(x) = f(x) - x \, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

On montre facilement que $g(a) = g(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$ et que $g$ est dérivable en tout point de $]a, b[$ avec

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g$ pour conclure. □

L'expression “accroissements finis” est justifiée par le corollaire suivant :

**Corollaire 2.4** *On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$, et que $f'$ est bornée sur $]a, b[$ par une constante $K$. Alors,*

$$\forall x, y \in [a, b], \qquad |f(y) - f(x)| \le K|y - x|$$

*De plus, on peut prendre*

$$K = \sup_{x \in ]a,b[} |f'(x)|$$

Une fonction $f$ vérifiant l'inégalité ci-dessus est dite lipschitzienne.

## 2.2 Les formules de Taylor

Les formules de Taylor sont au nombre de 3 : Taylor-Lagrange, Taylor avec reste intégral et Taylor-Young. On commente la différence entre les formules en fin de partie.

**Théorème 2.5 (Formule de Taylor-Lagrange)** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ avec $f^{(n)}$ dérivable en tout point de $I$. Pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $x \in I$, il existe un nombre réel $c$ compris entre $x_0$ et $x$ tel que*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \ .$$

La formule ci-dessus est appelée formule de Taylor-Lagrange d'ordre $n$ au point $x_0$.

La formule précédente s'écrit aussi, sous forme plus condensée :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \ ,$$

où $c$ est compris entre $x_0$ et $x$, avec comme convention $f^0 = f$. Une autre écriture possible (obtenue en écrivant $x = x_0 + h$) est :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \ ,$$

où $c$ est compris entre $x_0$ et $x_0 + h$. L'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$ est appelée *partie régulière* (ou polynômiale) de la formule de Taylor, tandis que l'expression $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est *le reste*.

**Preuve :** On suppose pour simplifier que $x > x_0$ (le cas $x < x_0$ se traitant de façon similaire). Considérons la fonction auxiliaire $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in I,\ g(t) = f(t) + \frac{(x-t)}{1!} f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) + \cdots + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

où la constante $A$ est choisie de telle sorte que $g(x_0) = g(x)$. Notons que $g(x) = f(x)$. La fonction $g$ est continue et dérivable en tout point de $I$ puisque $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $f^{(n+1)}$ existe en tout point de $I$. De plus, on montre facilement que, pour tout $t \in I$, $g'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!} A$. Appliquons le théorème de Rolle à $g$ : il existe $c \in ]x_0, x[$ tel que $g'(c) = 0$. Pour cette valeur $c$, on a donc $g'(c) = \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - \frac{(x-c)^n}{n!} A = 0$, ce qui implique que $A = f^{(n+1)}(c)$ puisque $c \neq x$. Comme $f(x) = g(x) = g(x_0)$, nous avons donc obtenu :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \ .$$

□

**Théorème 2.6 (Formule de Taylor avec reste intégral)** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I$. Pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $x \in I$, on a*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \ .$$

La formule ci-dessus est appelée formule de Taylor avec reste intégral d'ordre $n$ au point $x_0$.

Comme pour Taylor-Lagrange, il est pratique de la mettre sous forme plus compacte :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

**Preuve :** La preuve se fait par récurrence sur $n$. La formule est clairement vraie pour $n = 0$ car dans ce cas la formule affirme que

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t) dt.$$

Supposons-la vraie au rang $n$. Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\
&= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on obtient alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \end{aligned}$$

ce qui est la formule au rang $n+1$. Par récurrence on en déduit que le résultat est vrai pour tout $n$. □

**Théorème 2.7 (Formule de Taylor-Young)** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$. Alors pour tout $x_0 \in I$ il existe une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \epsilon(x)$$

*avec* $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$.

La formule ci-dessus est appelée formule de Taylor-Young d'ordre $n$ au point $x_0$.

La formule précédente s'écrit aussi, sous forme plus condensée :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \epsilon(x) ,$$

**Preuve :** On utilise la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ en $x_0$ : pour tout $x \in I$, il existe $c_x$ entre $x_0$ et $x$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c_x).$$

Si on pose $\epsilon(x) = \left( f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0) \right) / n!$, on peut réécrire la formule ci-dessus sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \epsilon(x).$$

Lorsque $x$ tend vers $x_0$, $c_x$ tend vers $x_0$ également puisque $c_x$ est compris entre $x_0$ et $x$. Par continuité de $f^{(n)}$, on en déduit que $f^{(n)}(c_x)$ tend vers $f^{(n)}(x_0)$. Par conséquent, $\epsilon(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $x_0$. □

**Remarque :** La formule de Taylor-Young est d'un usage constant dans toute la suite du chapitre car c'est un cas particulier de développement limité. Si utile qu'elle soit, cette formule n'est pas toujours suffisamment précise en ce qui concerne son reste, au contraire de Taylor-Lagrange ou Taylor avec reste intégral.

## 2.3 Application à l'étude des fonctions

Une première application directe des formules de Taylor est la caractérisation des fonctions croissantes en terme de dérivées. Fixons $I$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

**Théorème 2.8** *On suppose que $f$ est dérivable sur $I$. Alors $f$ est croissante sur $I$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$ en tout point $x \in I$.*

*Si, de plus, $f'(x) > 0$ pour tout point $x$ de $I$, alors $f$ est strictement croissante sur $I$.*

**Preuve :** Si $f$ est croissante, alors $f(x+h) - f(x) \geq 0$ pour tout $h > 0$ et pour tout $x \in I$. Donc

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 .$$

Réciproquement, supposons que $f' \geq 0$ sur $I$. Soient $x, y$ deux point de $I$ avec $x \leq y$. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange entre $x$ et $y$ : il existe $c \in [x, y]$ tel que $f(y) = f(x) + (y - x)f'(c)$. Comme $f'(c) \geq 0$ et $y - x \geq 0$, on a $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) \geq 0$. Donc $f$ est croissante sur $I$.

Supposons maintenant que $f'(x) > 0$ pour tout point $x$ de $I$. Appliquons l'égalité $f(y) = f(x) + (y - x)f'(c)$ entre deux points $x, y$ avec $x < y$. Alors $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) > 0$ puisque $y - x > 0$ et $f'(c) > 0$. Donc $f$ est strictement croissante sur $I$. □

Les formules de Taylor permettent également d'étudier le comportement local d'une fonction.

**Proposition 2.9** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$.*

- *Si $f$ possède un minimum local en un point $x_0 \in I$, alors*

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x_0) \geq 0 .$$

- *"Réciproquement", si au point $x_0 \in I$ on a*

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x_0) > 0 ,$$

*alors $f$ possède un minimum local en $x_0$.*

**Remarque 2.10** En appliquant le résultat précédent à $-f$, on notera que, si la fonction $f$ possède un maximum local en un point $x_0 \in I$, alors

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x_0) \leq 0 ,$$

D'autre part, si $f$ vérifie

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x_0) < 0 ,$$

alors $f$ possède un maximum local en $x_0$.

**Preuve :** Si $f$ possède un minimum local en un point $x_0 \in I$, on sait déjà que $f'(x_0) = 0$. D'après la formule de Taylor-Lagrange,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(c_h)h^2 = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(c_h)h^2$$

pour un certain $c_h$ compris en $x_0$ et $x_0 + h$. Comme $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ dès que $|h|$ est suffisamment petit (puisque $f$ possède un minimum local en $x_0$), on obtient

$$0 \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^2/2} = f''(c_h) .$$

Lorsque $h \to 0$, avec $h \neq 0$, $c_h$ tend vers $x_0$ et donc $f''(x_0) \geq 0$.

Inversement, supposons qu'au point $x_0 \in I$ on ait

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x_0) > 0 ,$$

Comme $f''$ est continue et que l'intervalle $I$ est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que l'intervalle $[x_0-\eta, x_0+\eta]$ est contenu dans $I$ et tel que $f''(x) > 0$ dans cet intervalle. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre $x_0$ et $x$, où $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ : il existe $c$ compris entre $x_0$ et $x$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c) \ .$$

Comme $c$ appartient à $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, $f''(c) > 0$. De plus, $f'(x_0) = 0$, ce qui prouve finalement que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. □

**Remarque 2.11** En fait cette démonstration montre que, si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$ alors

$$\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta], \quad x \neq x_0 \ \Rightarrow \ f(x) > f(x_0) \ .$$

On dit que $f$ possède un minimum local strict en $x_0$.

## 2.4 Définition des développements limités

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si on se donne un point $x_0$ de $I$ et un entier $n \geq 0$, on dit que $f$ admet un développement limité (DL) d'ordre $n$ en $x_0$ s'il existe un polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n$, tel que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x - x_0)}{(x - x_0)^n} = 0 \ .$$

On note traditionnellement par $\epsilon(x)$ la fonction $\frac{f(x)-P(x-x_0)}{(x-x_0)^n}$.

Autrement dit, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet un DL à l'ordre $n$ au point $x_0$ si l'on peut trouver $n + 1$ réels $a_0, \dots a_n$ tels que

$$\forall x \in I, \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

où $\epsilon(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $x_0$.

Le polynôme $P(x - x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ s'appelle la *partie régulière* du DL.

Notons que, si $f$ admet un DL à l'ordre $n$ en $x_0$, alors $f$ admet un DL à l'ordre $p$ pour tout entier $p \leq n$. En effet

$$\forall x \in I, \ f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^p \epsilon_1(x)$$

où $\epsilon_1(x) := \displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} a_i (x - x_0)^{i-p} + (x - x_0)^{n-p} \epsilon(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $x_0$.

**La notation $\epsilon(x)$ :** Par la suite, $\epsilon(x)$ désignera n'importe quelle quantité qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $x_0$ (si on fait un DL en $x_0$). En particulier, $\epsilon(x)$ peut désigner deux fonctions *différentes* au sein d'une même expression, d'où des égalités du type :

$$\epsilon(x) + \epsilon(x) = \epsilon(x) \ , \qquad \epsilon(x) - \epsilon(x) = \epsilon(x) \ , \qquad \epsilon(x).\epsilon(x) = \epsilon(x) \ .$$

Par contre, l'expression $\epsilon(x)/\epsilon(x)$ n'est pas bien définie (et ne vaut pas 1 !!!) puisque, à nouveau, les deux $\epsilon(x)$ désignent des fonctions numériques différentes.

**Proposition 2.12 (Unicité du développement limité)** *Il existe au plus un développement limité au voisinage de $x_0$ d'ordre $n$ d'une fonction donnée.*

**Preuve :** Considérons deux développement limités de la fonctions $f$ à l'ordre $n$ en $x_0$ :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon_1(x) \text{ et } f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon_2(x)$$

Supposons que les polynômes $P(x-x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ et $Q(x-x_0) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k$ ne soient pas égaux. Notons $r$ le plus petit indice tel que $a_r \neq b_r$. Alors

$$\forall x \in I,\ 0 = f(x) - f(x) = \sum_{k=r}^{n} (a_k - b_k)(x-x_0)^k + (x-x_0)^n(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x))$$

Divisons cette égalité par $(x-x_0)^r$ et faisons tendre $x$ vers $x_0$ :

$$0 = \lim_{x \to x_0} \sum_{i=r}^{n} (a_k - b_k)(x-x_0)^{i-r} + (x-x_0)^{n-r}(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)) = a_r - b_r \neq 0\ .$$

Nous avons donc trouvé une contradiction avec la définition de $r$, et par conséquent, $P = Q$. Mais alors, on a aussi $\epsilon_1(x) = \epsilon_2(x)$ pour tout $x \in I$. $\square$

Une conséquence de l'unicité du DL est que les fonctions possédant certaines symétries ont une partie régulière possédant les mêmes symétries. Plus précisément :

**Corollaire 2.13** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application ayant un DL d'ordre $N$ en 0, de partie régulière $P$.*

1. *Si $f$ est paire, alors $P$ est pair.*
2. *Si $f$ est impaire, alors $P$ est impair.*

**Remarque :** Rappelons qu'une fonction paire (resp. impaire) est une fonction $f$ vérifiant $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (resp. $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Un polynôme $P$ est pair si $P$ est de la forme : $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_{2k} x^{2k}$ (autrement dit, les coefficients d'ordre impair sont nuls). En particulier, $P$ est de degré pair. De même, un polynôme $P$ est impair si $P$ est de la forme : $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_{2k+1} x^{2k+1}$. En particulier, $P(0) = 0$ et $P$ est de degré impair.

**Preuve :** On fait la démonstration dans le cas où $f$ est paire, le cas où $f$ est impaire se montrant de même. Comme $f$ a un DL d'ordre $N$ en 0 de partie régulière $P$, il existe une application $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x) + x^N \epsilon(x)\ .$$

Or $f$ est paire, et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x) = P(-x) + (-x)^N \epsilon(-x) = P(-x) + x^N (-1)^N \epsilon(-x)\ ,$$

ce qui est un autre DL d'ordre $N$ en 0 de la fonction $f$ puisque $(-1)^N \epsilon(-x) \to 0$ quand $x \to 0$. Par unicité du DL, on a donc $P(-x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\square$

## 2.5 Calcul de développements limités

Le premier outil de calcul de développements limités est la formule de Taylor-Young :

**Théorème 2.14** *Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$. Alors $f$ possède un développement limité d'ordre $n$ en tout point $x_0$ de $I$, donné par :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

*avec* $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$.

En utilisant le théorème précédent, l'on calcule les DL des fonctions usuelles donnés dans le tableau ci-dessous.

| | |
|---|---|
| DL à l'ordre $n$ en $x_0 = 0$ | $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \epsilon(x)$ |
| DL à l'ordre $n$ en $x_0 = 0$ | $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n \epsilon(x)$ |
| DL à l'ordre $n$ en $x_0 = 0$ | $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + x^n \epsilon(x)$ |
| DL à l'ordre $2n+1$ en $x_0 = 0$ | $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$ |
| DL à l'ordre $2n+2$ en $x_0 = 0$ | $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2} \epsilon(x)$ |
| DL à l'ordre 2 en $x_0 = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \notin \{0, 1\}$ | $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1) \frac{x^2}{2} + x^2 \epsilon(x)$ |
| DL à l'ordre 4 en $x_0 = 0$ | $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4 \epsilon(x)$ |

**Proposition 2.15 (Somme et produit de DL)** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un DL d'ordre $n$ en un point $x_0$, de partie régulière $P$ et $Q$ respectivement. Alors*

*- la fonction $f + g$ admet un DL à l'ordre $n$ en $x_0$ de partie régulière $P + Q$,*

*- la fonction $fg$ admet un DL à l'ordre $n$ en $x_0$ de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k$, où $c_0, \ldots, c_{2n}$ sont les coefficients du polynôme $PQ$.*

**Remarque :** Bien noter que le produit de DL d'ordre $n$ ne donne pas un DL d'ordre $2n$, bien que le produit $PQ$ soit de degré $2n$.

**Preuve :** Posons $P(x-x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ et $Q(x-x_0) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k$. Par définition, il existe deux fonctions $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ telles que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon_2(x)$$

avec $\epsilon_1(x) \to 0$ et $\epsilon_2(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$.

Pour la somme, le résultat est immédiat :

$$\forall x \in I,\ (f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon_3(x)$$

où $\epsilon_3(x) = \epsilon_1(x) + \epsilon_2(x)$, qui tend vers 0 lorsque $x \to x_0$.

Pour le produit, c'est un peu moins simple. Calculons d'abord $fg$ : pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= (P + (x-x_0)^n \epsilon_1)(Q + (x-x_0)^n \epsilon_2) \\ &= (PQ) + (x-x_0)^n [P\epsilon_2 + Q\epsilon_1 + (x-x_0)^n \epsilon_1 \epsilon_2] , \end{aligned}$$

où, pour simplifier l'expression, on a omis la dépendence de $P$, $Q$, $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ par rapport à $(x-x_0)$ et à $x$. Dans le produit $(PQ)(x-x_0) = \sum_{k=0}^{2n} c_k(x-x_0)^k$, on ne garde que les termes de degré $\leq n$, ce qui donne finalement

$$\forall x \in I,\ (fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon_4(x) ,$$

où

$$\epsilon_4(x) = \sum_{i=n+1}^{2n} c_k(x-x_0)^{i-n} + [P\epsilon_2 + Q\epsilon_1 + (x-x_0)^n \epsilon_1 \epsilon_2]$$

qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $x_0$. □

**Proposition 2.16 (Rapport de DL)** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un DL d'ordre $n$ en un point $x_0$, de partie régulière $P$ et $Q$ respectivement. On suppose que $g(x_0) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre $n$ en $x_0$ dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$, où $c_0, \ldots, c_n$ sont les coefficients du quotient suivant les puissances croissantes du polynôme $P$ par le polynôme $Q$ à l'ordre $n$.*

**Rappel :** Rappelons que, pour deux polynômes $P$ et $Q$, avec $Q(0) \neq 0$, et pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique couple de polynômes $(R, S)$, tel que $S = 0$ ou $deg(S) \leq n$ et $P = QS + X^{n+1}R$. Les polynômes $S$ et $R$ s'appellent respectivement le quotient et le reste de la division suivant les puissances croissantes de $P$ par $Q$ à l'ordre $n$.

**Preuve de la proposition :** Posons $P(x-x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ et $Q(x-x_0) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k$. Par définition, il existe deux fonctions $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ telles que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon_2(x)$$

avec $\epsilon_1(x) \to 0$ et $\epsilon_2(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$. Pour tout $x \in I$, on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{P + (x-x_0)^n\epsilon_1}{Q + (x-x_0)^n\epsilon_2} = \frac{P}{Q} + (x-x_0)^n\epsilon_3 \quad \text{où} \quad \epsilon_3(x-x_0) = \frac{Q\epsilon_1 - P\epsilon_2}{Q(Q + (x-x_0)^n\epsilon_2)}$$

qui tend vers 0 lorsque $x \to x_0$ car $g(x_0) \neq 0$. Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $P$ par $Q$ à l'ordre $n$ : il existe un polynôme $S$ de degré $\leq n$ et un polynôme $R$ tels que $P = QS + X^{n+1}R$. Donc

$$P(x-x_0) = Q(x-x_0)S(x-x_0) + (x-x_0)^{n+1}R(x-x_0)$$

et

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{P}{Q} + (x-x_0)^n\epsilon_3 = S + (x-x_0)^{n+1}\frac{R}{Q} + (x-x_0)^n\epsilon_3 = S + (x-x_0)^n\epsilon_4$$

où $\epsilon_4 = \epsilon_3 + (x-x_0)\frac{R}{Q}$, qui tend vers 0 quand $x \to x_0$ car $Q(x_0) = g(x_0) \neq 0$. □

**Proposition 2.17 (Composition de DL)** *Soit $I$ et $J$ deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL d'ordre $n$ en un point $x_0 \in I$, de partie régulière $P$, avec $y_0 = f(x_0) \in J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL d'ordre $n$ en $y_0 = f(x_0)$, de partie régulière $Q$ donné par $Q(y-y_0) = \sum_{k=0}^n b_k(y-y_0)^k$.*

*Alors $g \circ f$ admet un DL en $x_0$ d'ordre $n$, dont la partie régulière est la somme des termes de degré $\leq n$ du polynôme $b_0 + b_1(P(x-x_0) - y_0) + \cdots + b_n(P(x-x_0) - y_0)^n$.*

**Preuve :** Elle est vraiment très technique ! Posons $P(x-x_0) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k$. Par définition, il existe deux fonctions $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ telles que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^n b_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n\epsilon_2(x)$$

avec $\epsilon_1(x) \to 0$ et $\epsilon_2(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$. Comme $f(x_0) = y_0$, on a $a_0 = y_0$. Alors

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ (g \circ f)(x) \ = \ & b_0 + b_1(P + (x-x_0)^n\epsilon_1 - y_0) + b_2(P + (x-x_0)^n\epsilon_1 - y_0)^2 + \\ & + \cdots + b_n(P + (x-x_0)^n\epsilon_1 - y_0)^n + (P + (x-x_0)^n\epsilon_1 - y_0)^n\epsilon_2\ ,\end{aligned}$$

où $P = P(x-x_0)$, $\epsilon_1 = \epsilon_1(x)$ et $\epsilon_2 = \epsilon_2(P + (x-x_0)^n\epsilon_1)$. Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $1 \leq k \leq n$, on a

$$(P + (x-x_0)^n\epsilon_1 - y_0)^k - (P - y_0)^k = \sum_{i=1}^k \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)(x-x_0)^{ni}\epsilon_1^k(P-y_0)^{k-i} = (x-x_0)^n w_k(x-x_0)$$

où $w_k(x-x_0) = \sum_{i=1}^k \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)(x-x_0)^{n(i-1)}\epsilon_1^k(P-y_0)^{k-i} \to 0$ quand $x \to x_0$ car $P - y_0$ tend vers 0.

En particulier, pour $k = n$, $(P + (x-x_0)^n\epsilon_1 - y_0)^n = (P-y_0)^n + (x-x_0)^n w_n(x-x_0)$. Comme $P(0) = y_0$, le polynôme $P(X) - y_0$ est divisible par $X$, et il existe un polynôme $R$ tel que $P(x-x_0) - y_0 = (x-x_0)R(x-x_0)$. Donc

$$(P + (x-x_0)^n\epsilon_1 - y_0)^n = (x-x_0)^n[(R(x-x_0))^n + w_n(x-x_0)]\ .$$

De plus, comme $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, l'expression $\epsilon_2(P + (x-x_0)^n\epsilon_1 - y_0)$ tend vers 0 lorsque $x \to x_0$. On en déduit que

$$(*) \quad \forall x \in I,\ (g \circ f)(x) = b_0 + b_1(P-y_0) + b_2(P-y_0)^2 + \cdots + b_n(P-y_0)^n + (x-x_0)^n w(x-x_0)$$

avec

$$w(x-x_0)=\sum_{k=1}^{n} w_k(x-x_0)+(x-x_0)^n[(R(x-x_0))^n+w_n(x-x_0)]\epsilon_2(P+(x-x_0)^n\epsilon_1)\ ,$$

qui tend vers 0 lorsque $x \to x_0$. A partir de (*), on finit la démonstration en ne gardant dans le développement des termes de la forme $b_k(P-y_0)^k$ que ceux dont le degré est $\leq n$, le reste pouvant être écrit sous la forme $(x-x_0)^n\epsilon(x)$. □

**Proposition 2.18 (Primitive de DL)** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL d'ordre $n$ en un point $x_0$ de partie régulière donnée par $P(x-x_0)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$. Alors, si $F$ est une primitive de $f$, $F$ admet un DL en $x_0$ à l'ordre $n+1$, de partie régulière donnée par*

$$Q(x-x_0)=F(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{i+1}\ .$$

**Remarque :** Notons que $Q$ est rien d'autre que la primitive de $P$ qui vaut $F(x_0)$ en 0.

**Preuve :** Nous devons montrer que la fonction

$$\epsilon_2(x)=\frac{F(x)-Q(x-x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

tend vers 0 lorsque $x \to x_0$. Pour cela, fixons $\epsilon > 0$. Par définition du DL, il existe une fonction $\epsilon_1$ telle que

$$\forall x \in I,\ f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k+(x-x_0)^n\epsilon_1(x)$$

avec $\epsilon_1(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$. Par conséquent, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ |x-x_0| \leq \eta\ \Rightarrow\ |\epsilon_1(x)| \leq \epsilon\ .$$

Notons maintenant que l'application $x \to F(x)-Q(x-x_0)$ est une primitive de $x \to f(x)-P(x-x_0)$ et que $F(x_0)-Q(0)=0$. Pour tout $x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]$, le théorème des accroissements finis appliqué à l'application $x \to F(x)-Q(x-x_0)$ entre $x_0$ et $x$ affirme qu'il existe un réel $c$ compris entre $x$ et $x_0$ tel que $f(c)-P(c-x_0)=\frac{F(x)-Q(x-x_0)}{x-x_0}$. Comme $c$ est compris entre $x$ et $x_0$, et que $|x-x_0| \leq \eta$, on a $|c-x_0| \leq \eta$. Donc, d'après la définition de $\eta$, $|\epsilon_1(c)| \leq \epsilon$. Mais alors

$$|\epsilon_2(x)|=\left|\frac{F(x)-Q(x-x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}\right|=\left|\frac{f(c)-P(c-x_0)}{(x-x_0)^n}\right|=\left|\frac{(c-x_0)^n\epsilon_1(c)}{(x-x_0)^n}\right|=\left|\frac{(c-x_0)^n}{(x-x_0)^n}\right||\epsilon_1(c)| \leq \epsilon$$

puisque $|c-x_0| \leq |x-x_0|$. Nous avons donc prouvé que, pour tout $x \in I$ tel que $|x-x_0| \leq \eta$, $|\epsilon_2(x)| \leq \epsilon$, ce qui montre que $\epsilon_2(x) \to 0$ quand $x \to x_0$. □

## 2.6 Application à la recherche d'équivalents

**Définition 2.19 (Suites équivalentes)** *Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)$ est équivalente à $(v_n)$ (en $+\infty$) si le rapport $u_n/v_n$ est défini à partir d'un certain rang et si* $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ .

*On note $u_n \sim v_n$.*

**Proposition 2.20** *La relation "$(u_n)$ est équivalente à $(v_n)$" est une relation d'équivalence dans l'ensemble des suites qui sont non nulles à partir d'un certain rang.*

On pourra donc dire que les suites "$(u_n)$ et $(v_n)$ sont équivalentes".

**Preuve :** La relation est bien sûr réflexive : $u_n/u_n = 1 \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

Comme la suite $(u_n/v_n)$ tend vers 1, $(u_n/v_n)$ est non nulle à partir d'un certain rang. Alors la suite $(v_n/u_n)$ tend vers $1/1 = 1$. La relation est donc symétrique.

Montrons qu'elle est transitive : soient $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites réelles, avec $(u_n)$ équivalente à $(v_n)$ et $(v_n)$ équivalente à $(w_n)$. Alors, comme $(v_n)$ et $(w_n)$ sont non nulles à partir d'un certain rang, on a

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n} .$$

Par hypothèse, les suites $(u_n/v_n)$ et $(v_n/w_n)$ tendent vers 1. Donc la suite $(u_n/w_n)$ tend également vers 1, c'est-à-dire que $(u_n)$ est équivalente à $(w_n)$. □

**Proposition 2.21** *Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites équivalentes. Si $(u_n)$ possède une limite (finie ou infinie), alors $(v_n)$ possède la même limite.*

**Remarque :** En particulier, si $(u_n)$ tend vers une limite $\ell$ **non nulle**, si et seulement si, $(u_n)$ est équivalente à la suite constante $\ell$. Cependant, même si $(u_n)$ tend vers 0, la suite $(u_n)$ n'est jamais équivalente à la suite constante 0 (cf. la définition de suites équivalentes).

**Preuve :** En effet, comme $u_n$ est non nul à partir d'un certain rang, on peut écrire : $v_n = \frac{v_n}{u_n}u_n$. Or $(v_n/u_n)$ tend vers 1. Donc $(v_n)$ tend vers la même limite que $(u_n)$. □

Le résultat suivant affirme qu'on peut multiplier et diviser les équivalents. Nous verrons par la suite qu'en général, on ne peut pas additionner ceux-ci.

**Proposition 2.22** *Soit $(u_n)$, $(v_n)$, $(z_n)$ et $(w_n)$ quatre suites réelles. On suppose que $(u_n)$ et $(v_n)$, ainsi que les suites $(z_n)$ et $(w_n)$ sont équivalentes. Alors les suites $(u_nz_n)$ et $(v_nw_n)$ sont équivalentes.*

*De même, les suites $(u_n/z_n)$ et $(v_n/w_n)$ sont équivalentes.*

**Preuve :** Il suffit de noter que

$$\frac{u_nz_n}{v_nw_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{z_n}{w_n} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty$$

tandis que

$$\frac{u_n/z_n}{v_n/w_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{w_n}{z_n} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty .$$

□

Nous montrons maintenant que l'on ne peut additionner des équivalents en général. Soient $u_n = v_n = n$, $z_n = -n + 1$ et $w_n = -n + \sqrt{n}$. Alors $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites équivalentes, et il en est de même pour les suites $(z_n)$ et $(w_n)$. Mais la suite $(u_n + z_n = 1)$ n'est pas équivalente à la suite $(v_n + w_n = \sqrt{n})$.

De façon symétrique, on peut définir la notion de fonctions équivalentes.

**Définition 2.23 (fonctions équivalentes)** *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un intervalle ouvert contenant le point $a \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$ ou en $-\infty$). On dit que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ au voisinage de $a$ (resp. en $+\infty$ ou en $-\infty$) si le rapport $f(x)/g(x)$ est défini sur cet intervalle et si* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ *(resp. si* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ *ou si* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ *).*

*On note $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to a$ (resp. lorsque $x \to +\infty$ ou lorsque $x \to -\infty$).*

**Proposition 2.24** *La relation "$f(x)$ est équivalente à $(g(x))$" est une relation d'équivalence.*

La démonstration est identique à l'assertion similaire pour les suites, et nous la laissons en exercice.

Comme pour les suites, on peut multiplier et diviser les équivalents. Par contre, en général, on ne peut pas additionner ni composer ceux-ci.

**Théorème 2.25** *Soit $f_1$, $f_2$, $g_1$ et $g_2$ quatre applications. On suppose que $f_1$ et $f_2$, ainsi que $g_1$ et $g_2$ sont équivalentes au voisinage d'un point $a$ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$). Alors les fonctions $(f_1g_1)(x)$ et $(f_2g_2)(x)$ sont équivalentes au voisinage de $a$ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$).*

*De même, les fonctions $(f_1/g_1)(x)$ et $(f_2/g_2)(x)$ sont équivalentes au voisinage de $a$ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$).*

**Preuve :** Elle est identique à celle de la proposition 2.22. □

Montrons maintenant qu'on ne peut additionner des équivalents en général. Par exemple, si $f_1(x) = x + x^3$ et $f_2(x) = x + x^2$, tandis que $g_1(x) = g_2(x) = -x$, alors $f_1$ et $f_2$ sont équivalents en 0, de même que $g_1$ et $g_2$. Mais $(f_1 + g_1)(x) = x^3$ n'est pas équivalent en 0 à $(f_2 + g_2)(x) = x^2$.

De même, on ne peut composer des équivalents. Par exemple $f(x) = x$ est équivalent en $+\infty$ à $g(x) = x + \sqrt{x}$, mais $\exp(f(x)) = e^x$ n'est pas équivalente à $\exp(g(x)) = e^x e^{\sqrt{x}}$ (le rapport $\exp(f(x))/\exp(g(x))$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$).

Expliquons maintenant comment les DL peuvent être utilisés pour trouver des équivalents :

**Proposition 2.26** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que $f$ possède un DL d'ordre $N \geq 0$ au voisinage de $x_0$. Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_N x^N$ la partie régulière de DL. Alors $f$ est équivalent en $x_0$ à $a_k x^k$, où $k$ est le plus petit indice tel que $a_k \neq 0$.*

**Exemple :** Comme $1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + x^5\epsilon(x)$ (d'après le DL à l'ordre 5 de cos en 0), $1 - \cos(x)$ est équivalent à $\frac{x^2}{2}$ en 0.

**Preuve :** Le DL de $f$ à l'ordre $N$ en $x_0$ s'écrit

$$f(x) = a_k(x - x_0)^k + a_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + \cdots + a_N(x - x_0)^N + x^N\epsilon(x) ,$$

puisque $a_0 = \cdots = a_{k-1} = 0$ par définition de $k$. Donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{a_k(x - x_0)^k} = \lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}(x - x_0)^1 + \cdots + \frac{a_N}{a_k}(x - x_0)^{N-k} + \frac{1}{a_k}(x - x_0)^{N-k}\epsilon(x)\right) = 1 .$$

□

# 3 Fonctions convexes

## 3.1 Definition et propriétés élémentaires

**Définition 3.1** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est convexe sur $I$ si*

$$\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)\ .$$

*Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est concave sur $I$ si $-f$ est convexe sur $I$.*

**Proposition 3.2** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.*

*(i) Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions convexes et $\lambda \geq 0$, alors $\lambda f + g$ est une fonction convexe.*

*(ii) Si $J$ est un autre intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ est convexe, $g : J \to \mathbb{R}$ est convexe et croissante, alors $g \circ f$ est encore une fonction convexe sur $I$.*

**Preuve :** (i) Soient $x, y \in I$, $t \in [0,1]$. Alors

$$\begin{array}{rcl} (\lambda f + g)(tx + (1-t)y) & = & \lambda f(tx + (1-t)y)) + g(tx + (1-t)y) \\ & \leq & \lambda(tf(x) + (1-t)f(y)) + tg(x) + (1-t)g(y) \\ & & \qquad\qquad\qquad (\text{car } \lambda \geq 0 \text{ et } f, g \text{ convexes}) \\ & = & t(\lambda f + g)(x) + (1-t)(\lambda f + g)(y) \end{array}$$

(ii) Soient $x, y \in I$, $t \in [0,1]$. Comme $f$ est convexe, on a $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. Or $g$ est croissante donc $g(f(tx + (1-t)y)) \leq g(tf(x) + (1-t)f(y))$. Comme $g$ est également convexe, on obtient alors

$$g(f(tx + (1-t)y)) \leq g(tf(x) + (1-t)f(y)) \leq tg(f(x)) + (1-t)g(f(y)).$$

□

Avant d'énoncer les résultats de base sur les fonctions convexes, nous aurons besoin de la remarque technique suivante :

**Lemme 3.3** *Soit $I$ un intervalle non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors, pour tout $x, y, z \in I$ avec $x < y < z$, on a*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\ .$$

(Nous conseillons vivement au lecteur de faire un dessin).

**Preuve :** Comme $x < y < z$, on a

$$y = \lambda x + (1-\lambda)z \qquad \text{avec } \lambda = \frac{z - y}{z - x} \text{ et } 1 - \lambda = \frac{y - x}{z - x}\ .$$

Donc, par convexité,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} & = & \dfrac{f(\lambda x + (1-\lambda)z) - f(x)}{y - x} \leq \dfrac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(z) - f(x)}{y - x} \\ & = & (1-\lambda)\dfrac{f(z) - f(x)}{y - x} = \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}\ . \end{array}$$

De même

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y} & = & \dfrac{f(z) - f(\lambda x + (1-\lambda)z)}{z - y} \geq \dfrac{f(z) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(z)}{z - y} \\ & = & \lambda\dfrac{f(z) - f(x)}{z - y} = \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}\ . \end{array}$$

$\square$

Une première conséquence est qu'une fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue sur cet intervalle. Plus précisément :

**Lemme 3.4** *Si $I$ est un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors $f$ est lipschitzienne sur tout sous-intervalle compact $[a, b]$ inclus dans $I$. En particulier, $f$ est continue sur $I$.*

**Preuve :** Soit $[a, b] \subset I$. Comme $I$ est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a - \epsilon, b + \epsilon[$. Utilisons de façon répétitive le lemme précédent : pour tout $x, y \in [a, b]$, avec (par exemple) $x < y$, on a

$$\frac{f(a-\frac{\epsilon}{2}) - f(a-\epsilon)}{\epsilon/2} \leq \frac{f(x) - f(a-\frac{\epsilon}{2})}{x-(a-\frac{\epsilon}{2})} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq \frac{f(b+\frac{\epsilon}{2}) - f(y)}{b+\frac{\epsilon}{2}-y} \leq \frac{f(b+\epsilon) - f(b+\frac{\epsilon}{2}-y)}{\epsilon/2}$$

Donc

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y-x}\right| \leq \max\left\{\left|\frac{f(a-\frac{\epsilon}{2}) - f(a-\epsilon)}{\epsilon/2}\right|, \left|\frac{f(b+\epsilon) - f(b+\frac{\epsilon}{2}-y)}{\epsilon/2}\right|\right\} ,$$

où le membre de droite est indépendant de $x$ et $y$. $\square$

Une fonction convexe est toujours au-dessus de sa tangente :

**Proposition 3.5** *Si $f$ est convexe sur un intervalle $I$ et si $f$ est dérivable en un point $x_0 \in I$, alors*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x \in I .$$

Soulignons une conséquence immédiate, mais très importante, du résultat précédent :

**Corollaire 3.6** *Si $f$ est convexe sur $I$, dérivable en un point $x_0$ et si $f'(x_0) = 0$, alors $f$ possède un minimum global en $x_0$.*

Rappelons que, si une fonction $f$ admet un minimum en un point $x_0$ et si $f$ est dérivable en $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$. Le corollaire précédent affirme que, si $f$ est convexe et dérivable en $x_0$, alors l'égalité $f'(x_0) = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ possède un minimum global.

**Preuve de la proposition :** Supposons que $x_0 < x$ sont deux points de $I$. Soit $h > 0$ suffisamment petit pour que $x_0 < x_0 + h < x$. Le lemme 3.3 affirme que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - (x_0)} .$$

En faisant tendre $h \to 0^+$, on obtient, par définition de la dérivée et continuité de $f$ :

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} ,$$

d'où

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

L'inégalité dans le cas $x < x_0$ se montre de façon symétrique. $\square$

## 3.2 Caractérisation des fonctions convexes

**Théorème 3.7** *Supposons que $I$ soit un intervalle ouvert et que $f$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. Alors $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si $f'$ est croissante sur $I$.*

Signalons tout de suite le principal critère de convexité, dont la preuve à partir du théorème est immédiate :

**Corollaire 3.8** *Supposons que $f$ soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $I$. Alors $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*

**Par exemple,** les fonctions $x \to e^x$ (sur $\mathbb{R}$), $x \to x^\alpha$ (pour $\alpha \geq 1$, sur $]0, +\infty[$), $x \to -\log(x)$ (sur $]0, +\infty[$), sont convexes.

**Preuve du théorème :** Supposons d'abord que $f$ soit convexe sur $I$. Soient $x, y \in I$. On utilise la proposition 3.5 ci-dessus pour obtenir :

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y) \; .$$

On ajoute les deux inégalités membres à membres, puis on simplifie par $f(x) + f(y)$. Cela donne :

$$0 \geq (f'(x) - f'(y))(y-x) \; .$$

Ceci prouve que $f'$ est croissante.

Inversement, supposons que $f'$ soit une fonction croissante sur $I$. Soit $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$. On suppose par exemple que $x \leq y$. Posons $z = tx + (1-t)y$. Notons que $x \leq z \leq y$. D'après la formule des accroissements finis appliquée d'une part entre $x$ et $z$, et, d'autre part, entre $y$ et $z$, il existe $c_1 \in [x, z]$ et $c_2 \in [z, y]$ tels que

$$(*) \quad f(z) = f(x) + (z-x)f'(c_1) \quad \text{et} \quad f(z) = f(y) + (z-y)f'(c_2) \; .$$

Notons que $z - x = (1-t)(y-x)$ et $(z-y) = -t(y-x)$. On multiplie la première égalité obtenue dans $(*)$ par $t$ et la seconde par $(1-t)$ et on additionne, ce qui donne :

$$f(z) = tf(x) + (1-t)f(y) + t(1-t)(y-x)(f'(c_1) - f'(c_2)) \; .$$

Or $c_1 \leq z \leq c_2$. Comme $f'$ est croissante, $f'(c_1) \leq f'(c_2)$. D'où $t(1-t)(y-x)(f'(c_1) - f'(c_2)) \leq 0$, ce qui entraîne que

$$f(tx + (1-t)y) = f(z) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \; .$$

□

# 4 Intégration

## 4.1 L'intégrale de Riemann

Dans cette partie, nous proposons une (brève) approche de la construction de l'intégrale de Riemann.

**Définition 4.1 (Partition)** *On appelle partition d'un intervalle $[a, b]$ toute suite finie et strictement croissante de la forme $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.*

**Notation :** On notera une telle partition $\sigma = \{a_i\}_{i=0,\ldots,n}$.

**Définition 4.2 (Fonctions en escalier)** *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une partition $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ de $[a, b]$ telle que $f$ est constante sur tout intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ pour $k = 0, \ldots, (n-1)$.*

Bien noter qu'il n'y a pas unicité de la partition associée à $f$.

L'idée centrale de l'intégrale de Rieman est qu'on peut définir très naturellement l'intégrale des fonctions en escalier. En effet, notons que si $f$ est constante et égale à $c$ sur un intervalle $]a, b[$, alors $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$. Si on veut que l'intégrale vérifie la relation de Chasles, l'intégrale d'une fonction en escalier ne peut être définie que de la façon suivante :

**Définition 4.3** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Soit $\sigma = \{a_i\}_{i=0,\ldots,n}$ une partition associée et $c_k$ la constante à laquelle est égale $f$ sur l'intervalle $]a_k, a_{i+1}[$ pour $k = 0, \ldots, (n-1)$. Alors on appelle intégrale de $f$ sur $[a, b]$, et on note $\int_a^b f(x)dx$, le nombre réel*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(a_{k+1} - a_k) .$$

On peut *démontrer* que cette définition a bien un sens, c'est-à-dire que, si on considère deux partitions associées à la fonction en escalier $f$, alors on obtient bien le même résultat pour $\int_a^b f(x)dx$.

Nous allons avoir besoin de la notation suivante : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, on écrira $f \le g$ sur $[a, b]$ (resp. $f \ge g$ sur $[a, b]$) pour dire que $f(x) \le g(x)$ (resp. $f(x) \ge g(x)$) sauf éventuellement en un nombre *fini* de points $x$ de $[a, b]$.

**Lemme 4.4** *Si $g$ et $h$ sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$, avec $g \le h$ sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b h(x)dx .$$

**Preuve :** Soit $\sigma = \{a_i\}_{i=0,\ldots,n}$ une partition de $[a, b]$ qui soit associée à $g$ et à $h$ contenant tous les points (en nombres finis) où $g(x) > h(x)$. Alors, pour tout $i = 0, \ldots, n$, il existe des constantes $c_i$ et $d_i$ telles que $g(x) = c_i$ et $h(x) = d_i$ pour $x \in ]a_i, a_{i+1}[$. Comme $g \le h$ en dehors de $\{a_i\}$, on a $c_i \le d_i$ pour tout $i$. Donc

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i) \le \sum_{i=0}^{n-1} d_i(a_{i+1} - a_i) = \int_a^b h(x)dx .$$

□

On vérifie également facilement que l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[a, b]$, et que l'intégrale est une application linéaire sur cet espace vectoriel.

Maintenant que l'on sait définir l'intégrale pour les fonctions en escalier, nous allons définir l'intégrale de Riemann d'une fonction en approchant cette fonction par des fonctions en escalier. Notons cependant que l'on ne peut pas intégrer une fonction "quelconque". L'intégrale n'est généralement définie que pour une classe de fonctions (appelées fonctions intégrables).

**Définition 4.5 (Fonction Riemann intégrable)** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que $f$ est Riemann intégrable (ou intégrable) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $g$ et $h$ telles que*

$$g \le f \le h \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (h(x) - g(x))dx \ \le \ \epsilon \, .$$

**Proposition 4.6 (Intégrale de Riemann)** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, alors*

$$\sup \left\{ \int_a^b g(x)dx \ ; \ g \text{ en escalier}, \ g \le f \right\} = \inf \left\{ \int_a^b h(x)dx \ ; \ h \text{ en escalier}, \ h \ge f \right\}$$

*Cette valeur commune est appelée l'intégrale (de Riemann) de $f$ entre $a$ et $b$ et sera notée $\int_a^b f(x)dx$.*

Preuve : Notons $I^-$ le membre de gauche de l'égalité à démontrer (le "sup") et $I^+$ le membre de droite ("l'inf"). Le lemme 4.4 implique que $I^- \le I^+$. De plus, comme $f$ est intégrable, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $g$ et $h$ telles que

$$g \le f \le h \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (h(x) - g(x))dx \ \le \ \epsilon \, .$$

Mais alors

$$I^+ \le \int_a^b h(x)dx \le \int_a^b g(x)dx + \epsilon \le I^- + \epsilon \, .$$

Comme $\epsilon > 0$ est aussi petit que l'on veut, cela montre l'égalité $I^- = I^+$. □

**Remarque 4.7** La preuve montre en fait que, si $g$ et $h$ sont en escalier et telles que

$$g \le f \le h \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (h(x) - g(x))dx \ \le \ \epsilon \, ,$$

alors

$$0 \le \int_a^b h(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ \le \epsilon \qquad \text{et} \qquad 0 \le \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \ \le \epsilon$$

On démontre facilement que les fonctions en escalier sont Riemann intégrables et que leur intégrale de Riemann est égale à l'intégrale définie en Définition 4.3. Reste à montrer que la classe des fonctions intégrables est plus importante.

**Théorème 4.8** *Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue ou monotone sur $[a, b]$ est Riemann intégrable. De plus, dans les deux cas, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx \, .$$

**Remarque 4.9** La somme de gauche est appelée somme de Riemann, et est très utile pour calculer certaines limites.

La preuve du théorème est un peu délicate, et pourra être omise en première lecture.

**Preuve :** Supposons d'abord que $f$ est croissante sur $[a,b]$ (le cas où $f$ est décroissante se montre de même). Fixons $\epsilon>0$ et $N$ assez grand tel que $(b-a)(f(b)-f(a))/N\leq\epsilon$. Pour tout $n\geq N$, posons $a_i=a+i(b-a)/n$, $c_i=f(a_i)$ et $d_i=f(a_{i+1})$ pour $i=0,\ldots,n$. Comme $f$ est croissante, on a $c_i\leq d_i$. Soit $g_n$ (resp. $h_n$) la fonction en escalier de partition associée $\{a_i\}$, égale à $c_i$ (resp. $d_i$) sur $]a_i,a_{i+1}[$. Alors $g_n\leq f\leq h_n$ et

$$\int_a^b(h_n(x)-g_n(x))dx=\sum_{i=0}^n(d_i-c_i)(a_{i+1}-a_i)=\sum_{i=0}^n(f(a_{i+1})-f(a_i))\frac{(b-a)}{n}=(f(b)-f(a))\frac{(b-a)}{n}\leq\epsilon\ .$$

Donc $f$ est intégrable.

Notons également que $\int_a^b g_n(x)dx$ n'est rien d'autre que la somme de Riemann de $f$ d'indice $n$. On conclut grâce à la remarque 4.7 que, pour tout $n\geq N$,

$$\int_a^b g_n(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g_n(x)dx+\epsilon\ ,$$

c'est-à-dire que la somme de Riemann converge vers $\int_a^b f(x)dx$.

Nous supposons maintenant que $f$ est continue sur $[a,b]$. Le théorème de Heine affirme alors que $f$ est *uniformément continue* sur $[a,b]$ (cf. cours d'Analyse 1) : pour tout $\epsilon>0$ il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $x,y\in[a,b]$ avec $|x-y|\leq\eta$, on a $|f(x)-f(y)|\leq\epsilon$. Fixons $\epsilon>0$ et considérons le $\eta>0$ associé à $\epsilon/(b-a)$ par uniforme continuité. Soit $N\in\mathbb{N}$ assez grand de sorte que $(b-a)/N\leq\eta$. Pour tout $n\geq N$, posons $a_i=a+i(b-a)/n$, $c_i=\min_{x\in[a_i,a_{i+1}]}f(x)$ et $d_i=\max_{x\in[a_i,a_{i+1}]}f(x)$ pour $i=0,\ldots,n$. Par uniforme continuité, on a $c_i\leq d_i\leq c_i+\epsilon/(b-a)$. Soit $g_n$ (resp. $h_n$) la fonction en escalier de partition associée $\{a_i\}$, égale à $c_i$ (resp. $d_i$) sur $]a_i,a_{i+1}[$. Alors $g_n\leq f\leq h_n$ et

$$\int_a^b(h_n(x)-g_n(x))dx=\sum_{i=0}^n(d_i-c_i)(a_{i+1}-a_i)\leq\sum_{i=0}^n\frac{\epsilon}{b-a}(a_{i+1}-a_i)=\frac{\epsilon}{b-a}(b-a)=\epsilon\ .$$

Donc $f$ est intégrable.

Soit maintenant $\tilde{f}_n:I\to\mathbb{R}$ la fonction en escalier de partition associée $\{a_i\}$ et égale à $f(a_i)$ sur $]a_i,a_{i+1}[$. Notons que $\int_a^b\tilde{f}_n(x)dx$ est la somme de Riemann associée à $f$. Par définition de $c_i$ et $d_i$, on a

$$\int_a^b g_n(x)dx=\sum_{i=0}^n c_i(a_{i+1}-a_i)\leq\sum_{i=0}^n f(a_i)(a_{i+1}-a_i)=\int_a^b\tilde{f}_n(x)dx$$

et

$$\int_a^b\tilde{f}_n(x)dx=\sum_{i=0}^n f(a_i)(a_{i+1}-a_i)\leq\sum_{i=0}^n d_i(a_{i+1}-a_i)=\int_a^b h_n(x)dx\ .$$

On utilise alors la remarque 4.7 pour conclure que

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b\tilde{f}_n(x)dx\right|\leq\epsilon\ .$$

Ceci montre la convergence de la somme de Riemann de $f$ vers $\int_a^b f(x)dx$. □

De *la construction de l'intégrale*, on déduit les propriétés fondamentales suivantes :

**Proposition 4.10 (Propriétés de l'intégrale)**

1. **Linéarité de l'intégrale** *Si $f_1$ et $f_2$ sont deux fonctions Riemann intégrable sur $[a,b]$ sur $I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f_1+f_2$ et $\lambda f_1$ sont Riemann intégrables sur $[a,b]$, et*

$$\int_a^b (f_1+f_2)(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^b (\lambda f_1)(x)dx = \lambda \int_a^b f_1(x)dx \ .$$

2. **Relation de Chasles** *Si $f$ est une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$, alors $f$ est Riemann intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ .$$

3. **Positivité de l'intégrale** *Si $f$ est une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$ et positive sur $[a,b]$, c'est-à-dire $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$ , alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*

Une conséquence importante du dernier point est que l'intégrale conserve la relation d'ordre : Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions Riemann intégrables sur un intervalle sur $[a,b]$. Si

$$\forall x \in [a,b] \ , f_1(x) \leq f_2(x) \text{ alors } \int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx \ .$$

En particulier, on a toujours :

**Proposition 4.11** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable, alors*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

**Preuve :** En effet, comme $f \leq |f|$, on a $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$, et comme $-f \leq |f|$, on a $-\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$. D'où le résultat. □

## 4.2 Primitives

De la construction du chapitre précédent, on déduit l'existence de primitive d'une fonction continue :

**Théorème 4.12** *Soit $I$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f$ admet une primitive sur $I$, i.e., il existe une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que*

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x) \ .$$

*De plus, si $F_1$ et $F_2$ sont deux primitives de $f$ sur $I$, alors $F_1 - F_2$ est une fonction constante sur $I$. Enfin, pour tout $a \in I$, une primitive de $f$ est donnée par*

$$\forall x \in I, \qquad F(x) = \int_a^x f(s)ds \ .$$

**Preuve** Soit $a \in I$. Montrons d'abord que la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(s)ds$ est une primitive de $f$ sur $I$. Pour cela, fixons $x_0 \in I$ et montrons que le quotient différentiel $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ tend $f(x_0)$. Fixons $\epsilon > 0$. Comme $f$ est continue sur $I$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon \ .$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| &= \left|\tfrac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(s)ds - f(x_0)\right| \\ &= \tfrac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}(f(s)-f(x_0))ds\right| \\ &\leq \tfrac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}|f(s)-f(x_0)|ds\right|\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$, on a

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}\epsilon ds\right| = \epsilon\ .$$

On en déduit que $F$ est dérivable en $x_0$ et que $F'(x_0) = f(x_0)$. Comme $x_0$ est quelconque, cela montre que $F$ est une primitive de $f$.

Pour montrer que deux primitives de $f$ ne diffèrent que d'une constante, il suffit de remarquer que la dérivée de leur différence est nulle, et donc que leur différence est une fonction constante. □

En particulier, pour calculer une intégrale, il suffit de savoir calculer une primitive :

**Corollaire 4.13** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors l'intégrale de $f$ entre $a$ et $b$ est égale à*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

*où $F$ est une primitive de $f$ sur $[a, b]$.*

Comme deux primitives ne diffèrent que d'une constante, la quantité ci-dessus ne dépend pas du choix particulier de la primitive. Dans le tableau qui suit, on rappelle les primitives de quelques fonctions usuelles :

| Fonction | Primitive(s) |
|---|---|
| $f(x) = e^x$ | $F(x) = e^x + cte$ |
| $f(x) = \cos(x)$ | $F(x) = \sin(x) + cte$ |
| $f(x) = \sin(x)$ | $F(x) = -\cos(x) + cte$ |
| $f(x) = x^\alpha$ (pour $\alpha \neq -1$ et $x > 0$) | $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (pour $x > 0$) | $F(x) = \log(x) + cte$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ | $F(x) = \arctan(x) + cte$ |

## 4.3 Calcul d'intégrales

On possède deux outils principaux pour calculer une intégrale : l'intégration par parties et la formule de changement de variables.

**Théorème 4.14 (Intégration par parties)** *Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors,*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx\ .$$

*où on a utilisé la notation classique $\big[u(x)v(x)\big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.*

**Preuve :** Il suffit de remarquer que, comme $(uv)' = uv' + u'v$, on a

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx\ .$$

$\square$

**Applications :** On se sert très souvent de l'intégration par parties pour calculer des intégrales de la forme :

$$\int_a^b \cos(\alpha t)t^n dt, \qquad \int_a^b \sin(\alpha t)t^n dt \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b e^{\alpha t}t^n dt$$

où $\alpha\in\mathbb{R}$ (et $\alpha\neq 0$, sinon le calcul est immédiat) et $n\in\mathbb{N}^*$. En effet, pour la première intégrale par exemple, on pose $u(t)=t^n$ et $v'(t)=\cos(\alpha t)$. Alors $u'(t)=nt^{n-1}$ et $v(t)=\sin(\alpha t)/\alpha$ (+ constante) et donc

$$\int_a^b \cos(\alpha t)t^n dt = \big[t^n\sin(\alpha t)/\alpha\big]_a^b - \int_a^b nt^{n-1}\sin(\alpha t)/\alpha\ dt.$$

Si $n=1$, on a fini puisqu'on sait calculer la dernière intégrale. Si $n\geq 2$, on recommence en faisant une intégration par parties pour la dernière intégrale.

**Théorème 4.15 (Changement de variable)** *Soit $[a,b]$ et $[c,d]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue et $\phi:[c,d]\to[a,b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_c^d f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(y)dy\ .$$

**Preuve :** Soit $F$ une primitive de $f$ sur $[a,b]$. Alors $(F\circ\phi)' = (f\circ\phi)\phi'$. Donc

$$\int_c^d f(\phi(x))\phi'(x)dx = [F\circ\phi]_c^d = F(\phi(d)) - F(\phi(c)) = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(y)dy\ .$$

$\square$

Un moyen mnémotechnique pour se souvenir de ce changement de variable est de poser $y=\phi(x)$. Alors, formellement, $dy=\phi'(x)dx$. On remplace systématiquement dans l'intégrale $\int_c^d f(\phi(x))\phi'(x)dx$, $\phi(x)$ par $y$ et $\phi'(x)dx$ par $dy$. De plus, il ne faut pas oublier de changer les bornes d'intégration : quand $x$ vaut $c$ (resp. $d$), $y=\phi(x)$ vaut $\phi(c)$ (resp. $\phi(d)$).

**Remarque :** Très souvent, on veut se servir de la formule de changement de variables à l'envers : on doit calculer $\int_c^d f(y)dy$, et on voudrait "forcer" le changement de variables $x=\psi(y)$. Cela n'est possible que si $\psi$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ sur son $[c,d]$, et d'inverse $\mathcal{C}^1$. Alors on peut écrire

$$\int_c^d f(y)dy = \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} f(\psi^{-1}(x))(\psi^{-1})'(x)dx\ .$$

**Quelques exemples de calculs :**

- **Primitives de fractions rationnelles :** d'après le théorème de décomposition des fractions rationnelles, on sait qu'une fraction rationnelle $R = P/Q$ (où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]\backslash\{0\}$) peut se mettre sous la forme

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}(x)}{(Q_i(x))^j}$$

où $P_0$ est le quotient de la division euclidienne de $P$ par $Q$, $(Q_i)_{i=1,\ldots,k}$ sont les polynômes premiers distincts composant $Q$, de multiplicité respective $n_i \geq 1$, i.e.,

$$Q = \Pi_{i=1}^{k} (Q_i)^{n_i}$$

et où $A_{ij}$ sont des polynômes de degré strictement inférieur au degré de $Q_i$. Rappelons qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est premier si et seulement si il est soit de degré 1, soit de degré 2 sans racine réelle.

Le calcul d'une primitive de $R$ se ramène donc au calcul d'une primitive de $A_{ij}(x)/(Q_i(x))^j$.

Lorsque $deg(Q_i) = 1$, le calcul est immédiat : $A_{ij}$ est une constante et une primitive de $1/Q_i$ est de la forme $c_i \log(Q_i)$ (pour un certain $c_i \in \mathbb{R}$) tandis qu'une primitive de $1/(Q_i)^j$ (pour $j \geq 2$) est de la forme $c_{ij}/(Q_i)^{j-1}$ (pour un certain $c_{ij} \in \mathbb{R}$).

Lorsque $deg(Q_i) = 2$, $A_{ij}$ est un polynôme de degré 1, et on peut toujours écrire

$$\frac{A_{ij}}{(Q_i)^j} = \frac{c_{ij} Q_i'}{(Q_i)^j} + \frac{d_{ij}}{(Q_i)^j}$$

où $c_{ij}$ et $d_{ij}$ sont des réels. La fraction rationnelle $Q_i'/(Q_i)^j$ possède une primitive de la forme $\alpha_i \log(Q_i)$ (si $j = 1$) ou $\beta_{ij}/(Q_i)^{j-1}$ (si $j \geq 2$). D'autre part, pour calculer une primitive de $1/(Q_j)^j$, on fait un changement de variable affine pour se ramener à $C/(x^2+1)^j$ (où $C \in \mathbb{R}$). Lorsque $j = 1$, $1/(x^2+1)$ possède comme primitive $\arctan(x)$. Pour le calcul d'une primitive de $1/(Q_i)^j$ (où $j \geq 2$), les choses sont un peu plus longues et demandent un raisonnement par récurrence : on a

$$\frac{1}{(1+x^2)^j} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^j} - \frac{x^2}{(1+x^2)^j} = \frac{1}{(1+x^2)^{j-1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^j} \ ,$$

où l'on peut calculer une primitive de la fraction rationnelle de droite en intégrant par parties :

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^j} dx = -\frac{x}{2(j-1)(1+x^2)^{j-1}} + \frac{1}{2(j-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{j-1}} dx$$

Par conséquent on a ramené le calcul d'une primitive de $1/(1+x^2)^j$ à celui d'une primitive de $1/(1+x^2)^{j-1}$.

- **Primitives d'un polynôme de** $\cos$ **ou** $\sin$ **:** on utilise un procédé de linéarisation. Par exemple, pour calculer une primitive de $(\sin(x))^n$, on a, d'après la formule de Moivre,

$$(\sin(x))^n = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n \ ,$$

où le terme de gauche se développe en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$(\sin(x))^n = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} (-1)^{n-k} e^{i(2k-n)} \ .$$

On regroupe alors les termes de la forme $e^{ipx}$ avec ceux de la forme $e^{-ipx}$ (où $p \in \mathbb{N}^*$), pour former $\cos(px)$ ou $\sin(px)$. On s'est donc ramené au calcul d'une primitive d'une combinaison linéaire de $\sin(px)$ et $\cos(px)$ (où $p \in \{1, \ldots, n\}$).

- **Primitives de fractionnelles de** $\cos(x)$ **ou** $\sin(x)$ **:** Pour $x \in ]-\pi, \pi[$, on effectue le changement de variable $t = \tan(x/2)$, c'est-à-dire $x = 2\arctan(t)$. Alors $dx = 2dt/(1+t^2)$ et on utilise les égalités
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} .$$
On se ramène ainsi au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

## 4.4 Propriétés de l'intégrale

**Proposition 4.16** *Soit* $f$ *est une fonction continue sur* $[a, b]$*, avec* $a < b$*. On suppose que* $f$ *est positive sur* $[a, b]$*. Alors*
$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow [\quad f(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]\ ] .$$

**Remarque :** Autrement dit, si $f$ est positive et n'est pas identiquement nulle sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \ > \ 0$.

**Preuve :** Nous montrons la contraposée de l'assertion. Supposons que $f$ ne soit pas identiquement nulle sur $[a, b]$. Il existe donc un point $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Comme $f$ est continue sur $[a, b]$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que,
$$\forall x \in [a, b], \quad |x - x_0| \leq \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| \leq f(x_0)/2 .$$
Donc
$$\forall x \in [a, b], \quad |x - x_0| \leq \eta \ \Rightarrow \ f(x) \geq f(x_0) - f(x_0)/2 = f(x_0)/2 .$$
Comme $a < b$, on ne peut avoir simultanément $x_0 = a$ et $x_0 = b$. On considère donc le cas où $x_0 < b$, le cas inverse pouvant être traité de façon symétrique. Alors, quitte à diminuer $\eta >$ (remplacer par exemple $\eta$ par $\min\{\eta, b - x_0\}$ qui est strictement positif), on peut supposer que $x_0 + \eta$ appartient encore à $[a, b]$. Alors
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_0+\eta} f(x)dx + \int_{x_0+\eta}^b f(x)dx$$
Comme $a \leq x_0 \leq x_0 + \eta \leq b$ et que $f$ est positive sur $[a, b]$, $\int_a^{x_0} f(x)dx \geq 0$ et $\int_{x_0+\eta}^b f(x)dx \geq 0$. De plus, comme $f \geq f(x_0)/2$ sur $[x_0, x_0 + \eta]$, on a,
$$\int_{x_0}^{x_0+\eta} f(x)dx \ \geq \ \int_{x_0}^{x_0+\eta} \frac{f(x_0)}{2} dx \ = \ \eta \frac{f(x_0)}{2} \ > 0 .$$
Donc
$$\int_a^b f(x)dx \ \geq \ \eta \frac{f(x_0)}{2} \ > 0 .$$
□

**Théorème 4.17 (Premier théorème de la moyenne)** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et positive. Alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que*
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx .$$

**Preuve :** Notons que, si $\int_a^b g(x)dx = 0$, alors $g \equiv 0$ sur $[a,b]$. Dans ce cas le résultat est immédiat. On suppose maintenant que $\int_a^b g(x)dx > 0$. Comme $f$ est continue sur $[a,b]$, $f$ admet un minimum $m$ et un maximum $M$ sur $[a,b]$. Alors, comme $g$ est positive sur $[a,b]$, on a :

$$\forall x \in [a,b], \qquad m\, g(x) \leq f(x)g(x) \leq M\, g(x) \ .$$

D'où

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx \ .$$

Comme $\int_a^b g(x)dx > 0$, l'inégalité précédente prouve que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \in [m,M] \ .$$

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme alors qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \ .$$

□

Signalons qu'il existe un second théorème de la moyenne, dont la preuve est trop délicate pour être expliquée ici :

**Théorème 4.18 (Second théorème de la moyenne)** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante, et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx \ .$$

L'inégalité suivante est une des plus utiles de l'analyse :

**Théorème 4.19 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)** *Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$. Alors,*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left[ \int_a^b (f(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b (g(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

**Preuve :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$I(\lambda) = \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx \ .$$

Notons que $I(\lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Développons l'intégrande :

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_a^b \left[ (f(x))^2 + 2\lambda f(x)g(x) + \lambda^2 (g(x))^2 \right] dx \\ &= \int_a^b (f(x))^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda^2 \int_a^b (g(x))^2 dx \end{aligned}$$

Donc $I(\lambda)$ est un polynôme du second degré en $\lambda$ de signe constant ($\geq 0$). Par conséquent le discriminant de ce polynôme est négatif ou nul :

$$\Delta = \left[ 2 \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 - 4 \left[ \int_a^b (f(x))^2 dx \right] \left[ \int_a^b (g(x))^2 dx \right] \ \leq \ 0 \ .$$

Cette dernière inégalité, convenablement réarrangée, donne le résultat voulu. □

# 5 Fonctions de 2 variables réelles

Cette partie est une modeste introduction à l'étude des fonctions de plusieurs variables. L'idée est de familiariser le lecteur avec quelques notions simples (en vue des applications à l'économie notamment), sans entrer dans les aspects plus rigoureux qui nécessitent un peu plus de structure (topologie). Pour simplifier l'exposé, on se limite aux fonctions de 2 variables, la généralisation à trois (ou même à un nombre quelconque de) variables ne présentant aucune difficulté conceptuelle.

Un couple de $\mathbb{R}^2$ est le plus souvent noté par $(x, y)$ (ou $x_1, y_1$) etc...).

## 5.1 Continuité

**Définition 5.1** *Soit $(x_n, y_n)$ une suite de $\mathbb{R}^2$. On dit que $(x_n, y_n)$ converge vers un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si $(x_n)$ converge vers $x$ et $(y_n)$ converge vers $y$ :*

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \qquad \Leftrightarrow \qquad [x_n \to x \text{ et } y_n \to y] .$$

Il est souvent utilise de se ramener à un seul critère de convergence numérique. C'est l'objet de la remarque suivant, qui est un cas particulier d'un théorème fondamental de topologie[1].

**Proposition 5.2** *Soit $(x_n, y_n)$ une suite de $\mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i) La suite $(x_n, y_n)$ converge vers $(x, y)$.*

*(ii) La suite réelle $(|x_n - x| + |y_n - y|)$ tend vers $0$.*

*(iii) La suite réelle $((|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2)^{\frac{1}{2}})$ tend vers $0$.*

**Preuve :** (i) entraîne (ii) est évident. Si (ii) a lieu, alors, comme $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2$ pour tout $a, b \geq 0$, on a

$$0 \leq (|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2)^{\frac{1}{2}} \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

où le membre droit de l'inégalité tend vers 0 par (ii). Le théorème d'encadrement affirme alors que la suite $((|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2)^{\frac{1}{2}})$ tend vers 0. Donc $(ii) \Rightarrow (iii)$. Reste à comprendre l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$. Comme

$$0 \leq |x_n - x| \leq (|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2)^{\frac{1}{2}},$$

où le membre droit de l'inégalité tend vers 0 par (ii), la suite $(|x_n - x|)$ tend vers 0 : donc $(x_n)$ tend vers $x$. De même, comme

$$0 \leq |y_n - y| \leq (|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2)^{\frac{1}{2}},$$

où le membre droit de l'inégalité tend vers 0 par (ii), la suite $(y_n)$ tend vers $y$. On en déduit que $(x_n, y_n)$ tend vers $(x, y)$. □

**Définition 5.3** *Soit $D$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application. Si $(x, y)$ est un point de $D$, on dit que $f$ est continue en $(x, y)$ si, pour toute suite $(x_n, y_n)$ qui converge vers $(x, y)$ dans $D$ (i.e., $(x_n, y_n) \in D$ pour tout $n$), la suite réelle $(f(x_n, y_n))$ tend vers $f(x, y)$.*

L'assertion suivante est immédiate :

[1]Ce théorème dit qu'en dimension finie (ici 2) toutes les normes sont équivalentes. Autrement dit, toutes les façons d'évaluer la longueur des vecteurs donne la même notion de convergence de suites.

**Proposition 5.4 (Propriétés de base)** *Soit $D$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux applications et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $f$ et $g$ sont continues en un point $(x, y) \in D$. Alors $\lambda f + g$ et $fg$ sont continues en $(x, y)$.*

**Exemple :** On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est un polynôme (à deux variables) s'il existe un entier $N$ et des coefficients $(a_{i,j})_{0\le i,j\le N}$ tels que

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} a_{i,j} x^i y^j \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

où l'on a adopté la convention habituelle $x^0 = y^0 = 1$. Les polynômes sont bien sûr des fonctions continues en tout point.

## 5.2 Dérivées partielles

Pour simplifier l'exposé, on supposera que les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. C'est rarement le cas, mais alors il faut prendre garde à ce que les énoncés qui suivent ne sont le plus souvent valables qu'à "l'intérieur" du domaine de définition (c'est-à-dire pas sur le "bord")[2].

**Définition 5.5** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On dit que $f$ possède une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en $(x, y)$ si la fonction $t \to f(t, y)$ est dérivable au point $x$. Cette dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. De même $f$ possède une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en $(x, y)$ si la fonction $t \to f(x, t)$ est dérivable au point $y$. Cette dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.*

*Le couple $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \in \mathbb{R}^2$ est appelé le gradient de $f$ en $(x, y)$ et est noté $\nabla f(x, y)$.*

**Proposition 5.6 (Propriétés de base)** *Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux applications, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f$ et $g$ admettent un gradient en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et que $\phi$ est dérivable en $f(x, y)$. Alors $\lambda f + g$, $fg$ et $\phi \circ f$ admettent un gradient en $(x, y)$ avec*

$$\nabla(\lambda f + g)(x,y) = \lambda \nabla f(x,y) + \nabla g(x,y), \qquad \nabla(fg)(x,y) = f(x,y)\nabla g(x,y) + g(x,y)\nabla f(x,y)$$

*et*

$$\nabla(\phi \circ f)(x,y) = \phi'(f(x,y))\nabla f(x,y).$$

La preuve découle immédiatement des propriétés symétriques pour les fonctions d'une variable.

Contrairement au cas des fonctions d'une variable réelle, une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ peut très bien avoir des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tout en étant discontinue en ce point. C'est par exemple le cas pour la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition 5.7 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)** *On dit que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues dans $\mathbb{R}^2$.*

On peut montrer que, lorsque $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ au sens décrit ci-dessus, alors $f$ est continue en tout point.

[2]Les notions d'intérieur et de bord d'un ensemble seront définis précisément en deuxième année dans un cours de topologie.

**Proposition 5.8 (Propriétés de base)** *Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux applications, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f$, $g$ et $\phi$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ (sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement). Alors $\lambda f + g$, $fg$ et $\phi \circ f$ sont également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.*

La preuve est immédiate.
En particulier les polynômes à deux variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Définition 5.9 (Dérivées d'ordre 2)** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction ayant des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$. On dit que $f$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si les fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ admettent des dérivées partielles d'ordre 1 en $(x, y)$. On note alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x,y), \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x,y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](x,y), \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](x,y).$$

*On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si les 4 dérivées partielles secondes définies ci-dessus existent et sont continues.*

Bien entendu, les polynômes à deux variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On constatera que, fréquemment, les dérivées partielles croisées coïncident. On admettra le résultat suivant.

**Lemme 5.10 (Lemme de Schwarz)** *Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On est très utile de représenter les dérivées secondes sous forme matricielle (la matrice Hessienne) :

$$Hess_f(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Le lemme de Schwarz affirme donc que la matrice Hessienne est symétrique.

## 5.3 Dérivation des fonctions composées

Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ trois applications. On souhaite étudier la fonction composée

$$g(t) = f(a(t), b(t)).$$

Pour cela il sera utile de voir $f$ comme une fonction des variables "libres" $(a, b)$.

**Théorème 5.11 (Dérivation des fonctions composées)** *Si $a$, $b$ et $f$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $g$ l'est aussi et*

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial a}(a(t), b(t))a'(t) + \frac{\partial f}{\partial b}(a(t), b(t))b'(t)$$

*ou, de façon plus synthétique,*

$$g' = \frac{\partial f}{\partial a}a' + \frac{\partial f}{\partial b}b'.$$

Nous ne démontrerons pas ce résultat, qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général (le théorème de dérivation des fonctions composées, cf. cours de 2ième année). Voici une autre variante de ce résultat. Soient $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ trois applications. On souhaite étudier la fonction composée

$$g(x, y) = f(a(x, y), b(x, y)).$$

A nouveau, on verra $f$ comme une fonction des variables "libres" $(a, b)$.

**Théorème 5.12 (Dérivation des fonctions composées (suite))** *Si $a$, $b$ et $f$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $g$ l'est aussi et*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial a}(a(x, y), b(x, y))\frac{\partial a}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial b}(a(x, y), b(x, y))\frac{\partial b}{\partial x}(x, y),$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial a}(a(x, y), b(x, y))\frac{\partial a}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial b}(a(x, y), b(x, y))\frac{\partial b}{\partial y}(x, y).$$

On note, de façon plus synthétique,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}.$$

**Exemple : passage en coordonnées polaires.** Il est parfois utile, lorsqu'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie en coordonnées cartésiennes (i.e., $f = f(x, y)$), de travailler en coordonnées polaires :

$$\forall (r, \theta) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}, \qquad g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

On a

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta),$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos(\theta).$$

## 5.4 Conditions d'optimalité

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet un minimum en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si

$$f(x, y) \leq f(x', y') \qquad \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2.$$

De même, $f$ admet un maximum en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si

$$f(x, y) \geq f(x', y') \qquad \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2.$$

On peut remarque que $f$ admet un maximum en $(x, y)$, si et seulement si, $-f$ admet un minimum en $(x, y)$.

**Proposition 5.13 (Conditions nécessaires d'ordre 1)** *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dérivable en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et admet un minimum (ou un maximum) en $(x, y)$, alors son gradient en $(x, y)$ est nul :*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = (0, 0).$$

Attention, ce résultat est généralement faux s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum sous contraintes (i.e., si les $(x, y)$ doivent rester dans un ensemble donné)[3].

**Preuve :** On montre le résultat dans le cas d'un minimum. Si $f$ admet un minimum en $(x, y)$, alors la fonction $t \to f(t, y)$ admet aussi un minimum en $t = x$. Par condition nécessaire d'optimalité dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$. De même, comme la fonction $t \to f(x, t)$ admet un minimum en $t = y$, on a aussi $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. □

**Proposition 5.14 (Conditions nécessaires d'ordre 2)** *On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Si $f$ admet un minimum en $(x, y)$, alors on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \geq 0 \qquad \text{en } (x, y).$$

**Preuve :** Soit $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application $g(t) = f(x + tv_1, y + tv_2)$. Par théorème de dérivation des fonctions composées, la fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + tv_1, y + tv_2)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x + tv_1, y + tv_2)v_2$$

et (par symétrie des dérivées secondes)

$$g''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)v_2^2.$$

Comme $f$ admet un minimum en $(x, y)$, la fonction $g$ admet un minimum en $t = 0$. Donc $g''(0) \geq 0$. Cela montre que, pour tout $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)v_2^2 \geq 0. \tag{1}$$

En particulier, en prenant $(v_1, v_2) = (1, 0)$ puis $(v_1, v_2) = (0, 1)$, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \geq 0.$$

En prenant $v_2 = 1$ et $v_1$ quelconque, on remarque que la relation (1) est un polynôme du second ordre en $v_1$ qui ne change pas de signe. Son discriminant doit être négatif ou nul, ce qui donne la dernière relation. □

[3]Dans ce cas, la formule ci-dessus comprend un terme correcteur tenant compte de la contrainte (multiplicateur de Lagrange par exemple).