**Université Paris-Dauphine**
**DUMI2E**
**Année 2012-2013**

# Analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles

P. Cardaliaguet

Les démonstrations comportant le signe (*) sont à connaître.

*Bibliographie :* "Analyse fonctionnelle" H. Brézis, Masson.

## Table des matières

## Introduction

De nombreux modèles en physique, chimie, biologie et économie sont régis par des équations : ce peut être des équations différentielles ordinaires, mais aussi des équations aux dérivées partielles. L'objet de ce cours est d'introduire quelques techniques simples d'analyse des équations aux dérivées partielles.

### Equations différentielles ordinaires

Servent à modéliser des systèmes qui évoluent en temps, et dont la valeur à un instant est essentiellement donnée par la valeur "à l'instant précédent" corrigée par une variation infinitésimale qui ne dépend que de la valeur à l'instant précédent (et peut-être aussi de l'instant en question).

Exemples :

- Modèle logistique : $x(t)$ est la population à l'instant $t$.

$$x'(t) = x(t)(\alpha - x(t))$$

  $\alpha =$ taux de reproduction des proies.

- Modèle proie-prédateur (Lotka-Volterra) si $x(t)$ est la population de proies et $y(t)$ la population des prédateurs,

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - y(t)) \\ y'(t) = -y(t)(\beta - x(t)) \end{cases}$$

- Plus généralement,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

  où $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t)) \in \mathbb{R}^N$, $t$ est le temps et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ champs de vecteurs. Enfin, $t_0$ est l'instant initial du système, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ la position initiale.

Méthodes de résolution :

1. Calcul explicite (modèle logistique) ou semi-explicite (courbes intégrales)

2. Calcul numérique : nécessite en général une bonne connaissance des conditions d'existence, d'unicité, de stabilité des solutions.

   Pour l'EDO donnée ci-dessus, on montre l'existence et l'unicité en utilisant un théorème de point-fixe : supposons par exemple que $f$ soit continue et lipschitzienne en espace uniformément en temps :

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq C\|x - y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{R}$$

   Posons $X = \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ (où $\delta > 0$). Alors l'application $\Phi : X \to X$ définie par

$$\Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

   est contractante pour $\delta > 0$ suffisamment petit. Comme $X$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, on en déduit que $\Phi$ possède un unique point fixe.

### Exemples d'équations aux dérivées partielles

Dans les équations aux dérivées partielles, l'inconnue dépend de plusieurs variables et l'équation lie les dérivées partielles de l'inconnue.

- Equation de transport : un fluide (1 dimension) avance avec la vitesse $c$. A l'instant initial on ajoute un peu de sel (par exemple) dans ce fluide. Si $u(t,x)$ est la concentration de sel (gramme/litre par ex.), alors
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$$
On peut se fixer aussi la condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$ (concentration initiale de solvant).

- Equation de la chaleur : si $u(t,x)$ est la température dans un fil infini de section nulle, alors la chaleur se propage suivant l'équation :
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0$$
On peut se fixer aussi la condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$ (température initiale).

- Equation des ondes : la hauteur $u(t,x)$ à l'instant $t$ et à la position $x$ d'une corde vibrante évolue suivant l'équation :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0$$
On peut se fixer aussi la condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$ (Position initiale de la corde).

- Equation de Black-Scholes : le prix $C(t,x)$ d'une option d'achat dépend du temps $t$ et de la valeur $x$ de l'option suivant l'équation :
$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial C}{\partial x}(t,x) - rC(t,x) = 0 \ x > 0,\ 0 < t < T$$
où $T$ est la maturité de l'option, $\sigma$ est la volatilité de l'actif sous-jacent et $r > 0$ de taux de l'actif sans risque. L'équation précédente est complémentée par une condition terminale
$$C(T,x) = \max\{0, x - K\}$$
où $K$ est le prix d'exercice.

Méthodes de résolution :

- Formules explicites : c'est le cas pour les modèle exposés ci-dessus.
  - Pour l'équation de transport, par exemple, on note que toute fonction réelle $\phi$, la fonction $u(t,x) = \phi(x - ct)$ vérifie l'équation. Il suffit alors de prendre $\phi = u_0$.
  - Pour l'équation de la chaleurs, il existe une *formule intégrale* :
  $$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} u_0(y)dy \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$
  qui fonctionne dès que $u_0$ est suffisamment régulière.
  - Pour l'équation des ondes,
  - Pour l'équation de Black-Scholes, formule assez lourde.

- Par contre, il n'existe pas de solution explicite pour la plupart des modèles plus complexes, comme les options européennes avec des taux et volatilités non constantes, des modèles avec des dividendes. Ce n'est pas le cas non plus pour les options américaines.

- Malheureusement, les techniques de résolution sont beaucoup plus complexes que pour les EDO. Il n'y a pas de méthode générale, qui marche pour toutes les équations. Vous avez vu un peu des techniques de séries de Fourier.

  Nous verrons dans ce cours de techniques hilbertiennes (espaces de Sobolev), ainsi qu'une approche très générale, fonctionnant pour les EDP linéaires : la théorie des distributions.

# 1 Rappels sur les espaces vectoriels normés et les espaces de Hilbert

## 1.1 Espaces vectoriels normés

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

### 1.1.1 Normes sur un espace vectoriel

**Définition 1.1** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ est une norme si*

- $\|x\| \geq 0$ *pour tout* $x \in E$,
- $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E$,
- *(positive homogénéité)* $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$
- *(inégalité triangulaire)* $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Remarque 1.2** On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (EVN). La norme $\|\cdot\|$ définit naturellement une notion de distance sur $E$ : on mesure la distance entre deux points $x$ et $y$ de $E$ par $\|x - y\|$. Rappelons que cette distance induit les notions d'ouvert, fermé, compact, voisinage, etc...

Voici quelques exemples classiques d'EVN. D'autres seront étudiés en TD.

1. $\mathbb{R}^N$, muni d'une des normes suivantes, est un EVN : pour $p \in [1, +\infty[$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |x_i|, \qquad \text{où } x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

2. Soit $X$ un ensemble. L'espace vectoriel $E$ des applications *bornées* de $X$ dans $\mathbb{K}$ peut être muni de la norme suivante :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad \forall f \in E\ .$$

3. Soit $K$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$. L'espace vectoriel $E$ des applications *continues* de $K$ dans $\mathbb{K}$ peut être muni de la norme suivante :

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)| \qquad \forall f \in E\ .$$

   (rappelons que, puisque $x \to |f(x)|$ est continue, le maximum est atteint).

4. Soit $\ell^1$ espace vectoriel des séries réelles absolument convergentes. Alors $\ell^1$ peut-être muni de la norme

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \qquad \forall x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^1$$

**Définition 1.3** *On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel $E$ sont équivalentes s'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telle que*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \qquad \forall x \in E\ .$$

On rappelle que “être équivalent à” est une relation d'équivalence (d'où la terminologie).

**Théorème 1.4** *Si $E$ est de dimension finie, toutes les normes sur $E$ sont équivantes.*

Lorsque $E$ est de dimension infinie, ce résultat est toujours faux :

**Théorème 1.5** *Soit $E$ un espace vectoriel. Si toutes les normes sur $E$ sont équivalentes, alors $E$ est de dimension finie.*

En fait, en dimension infinie, il est rare que deux normes soient équivalentes.

### 1.1.2 Espaces complets

**Définition 1.6** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une suite $(x_n)$ d'éléments de $E$ est de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0\ \ \|x_n - x_{n+p}\| \leq \epsilon\ .$$

Rappelons que toute suite convergente est de Cauchy. Lorsque $(E, \|\cdot\|)$ est un EVN quelconque, la réciproque n'est pas forcément vraie.

**Définition 1.7** *On dit qu'un espace vectoriel normé $E$, muni de la norme $\|\cdot\|$ est complet pour cette norme, si toute suite de Cauchy (pour cette norme) d'éléments de $E$ converge. On dit aussi que $E$ est un espace de Banach.*

**Remarque 1.8**

1. Si deux normes sont équivalentes sur un EV $E$ et si $E$ est complet pour l'une des normes, autre $E$ est complet pour l'autre (exercice).
2. Si $E$ est de dimension finie, alors $E$ est complet (pour toute norme).
3. En dimension infinie, il est souvent essentiel pour les applications de travailler avec un espace complet (cf. la suite du cours).

**Exemples :**

1. Si $X$ un ensemble et $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est l'espace vectoriel des applications *bornées* de $X$ dans $\mathbb{K}$ être muni de la norme
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad \forall f \in E\ ,$$
alors $E$ est un espace de Banach.
2. De même, si $K$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$ et $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est l'espace vectoriel des applications *continues* de $K$ dans $\mathbb{K}$ muni de la norme
$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)| \qquad \forall f \in E\ ,$$
alors $E$ est un espace de Banach.

Voici une condition nécessaire et suffisante pour être complet dans un sous-espace complet :

**Proposition 1.9** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN complet et $K \subset E$ non vide. Alors $K$ est complet, si et seulement si, $K$ est fermé.*

**Preuve (*):** Supposons $K$ complet. Soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $K$ qui admet une limite $x \in E$. Comme $(x_n)$ converge, $(x_n)$ est une suite de Cauchy (exercice). Comme $K$ est complet, $(x_n)$ possède une limite $\bar{x}$ dans $K$. Or la limite d'une suite est unique, ce qui prouve que $x = \bar{x} \in K$. Donc $K$ est fermé.

Supposons maintenant que $K$ est fermé. Soit $(x_n)$ une suite de Cauchy de $K$. Alors $(x_n)$ est une suite de Cauchy dans $E$, qui est complet. Donc $(x_n)$ admet une limite $x \in E$. Comme $K$ est fermé et $(x_n)$ est une suite d'éléments de $K$, la limite $x$ est aussi dans $K$. Donc $(x_n)$ possède une limite dans $K$, et $K$ est complet. □

### 1.1.3 Applications linéaires continues

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.

**Théorème 1.10** *Soit $L : E \to F$ une* **application linéaire**. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i) $L$ est continue sur $E$,*

*(ii) $L$ est continue en $0_E$,*

*(iii) il existe une constante $K$ telle que*

$$\|L(x)\|_F \leq K\|x\|_E \qquad \forall x \in E$$

*(iv) $L$ est lipschitzienne sur $E$ (c'est-à-dire, il existe une constante $K \geq 0$ telle que $\|L(x)-L(y)\| \leq K\|x-y\|$ pour tout $x, y \in E$).*

**Preuve (*):** Il est clair que $(i) \Rightarrow (ii)$ et $(iv) \Rightarrow (i)$. L'implication $(iii) \Rightarrow (iv)$ est aussi très facile : soit $K$ la constante de $(iii)$. Alors, pour tout $x, y \in E$, on a par linéarité de $L$,

$$\|L(x) - L(y)\|_F = \|L(x-y)\|_F \leq K\|x-y\|_E \qquad \text{(par } (iii)\text{)}.$$

D'où (iv).

Le seul point sur lequel il faut un peu travailler est $(ii) \Rightarrow (iii)$ : comme, d'après $(ii)$, $L$ est continue en $0_E$, pour $\epsilon = 1 > 0$ il existe une constante $\eta > 0$ telle que, si $\|y - 0_E\|_E \leq \eta$, alors $\|L(y) - L(0_E)\|_F \leq \epsilon = 1$. Cela se réécrit $\|L(y)\|_F \leq 1$ si $\|y\|_E \leq \eta$, puisque $L$ est linéaire, et donc $L(0_E) = 0$. Soit maintenant $x \in E$ avec $x \neq 0_E$. Notons que $y = \eta\frac{x}{\|x\|_E}$ vérifie $\|y\|_E \leq \eta$, et donc $\|L(y)\|_F \leq 1$. On multiplie cette dernière inégalité par $\|x\|_E/\eta$ pour obtenir, par positive homogénéité de la norme puis linéarité de $L$ :

$$(\|x\|_E/\eta)\|L(y)\|_F = \|\ (\|x\|_E/\eta)L(y)\ \|_F = \|L((\|x\|_E/\eta)y)\|_F = \|L(x)\|_F \ \leq \frac{\|x\|_E}{\eta}\ .$$

Cette inégalité étant évidente pour $x = 0_E$, il existe donc une constante $K = 1/\eta$ pour laquelle l'inégalité de $(ii)$ a lieu. □

Soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensembles de applications *linéaires continues* de $E$ dans $F$. Notons que $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

**Proposition 1.11** *L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est muni de la norme*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

**Remarques :**

1. Lorsque $E$ et $F$ sont de dimension finie, on retrouve la notion de norme matricielle.

2. On montre facilement (exercice) que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\{\|T(x)\|_F \mid x \in E,\ \|x\|_E \le 1\}$$

3. Par la suite nous travaillerons fréquemment avec l'espace $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Cet espace s'appelle le dual topologique de $E$.

**Preuve de la proposition (*):** Il est clair que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. Montrons que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est une norme.

- il est clair que $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \ge 0$ pour tout $T$,
- Supposons que $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$. Alors on a, pour tout $x \in E$, $\|T(x)\|_F \le \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$ , soit $T(x) = 0_F$. Donc $T$ est l'application linéaire nulle.
- (positive homogénéité) Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme, pour tout $x \in E$, on a $\|\lambda T(x)\|_F = |\lambda|\ \|T(x)\|_F$, on en déduit que

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \ne 0_E} |\lambda| \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \ne 0_E} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = |\lambda|\ \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} .$$

- (inégalité triangulaire) soient $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$. On utilise la définition équivalente donnée dans la remarque. Pour tout $x \in E$, avec $\|x\|_E \le 1$. On a

$$\|(T_1+T_2)(x)\|_F = \|T_1(x) + T_2(x)\|_F \le \|T_1(x)\|_F + \|T_2(x)\|_F \le \|T_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|T_2\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

En prenant le supremum sur $x$, avec $\|x\|_E \le 1$, on obtient :

$$\|T_1 + T_2\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \|T_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|T_2\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

□

Voici quelques propriétés élémentaires de cette norme : si $T \in \mathcal{L}(E,F)$, alors

(i) $\|T(x)\|_F \le \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}\ \|x\|_E \qquad \forall x \in E$

(ii) en particulier, $\|T(x) - T(y)\|_F \le \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}\ \|x-y\|_E \qquad \forall x, y \in E$

**Théorème 1.12** *Si $F$ est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est également un espace de Banach.*

**Remarque 1.13** En particulier le dual d'un EVN est toujours complet : rappelons que le dual $E'$ d'un EVN $E$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur $E$ :

$$E' = \{T : E \to \mathbb{R},\ T \text{ linéaire continue}\}$$

**Preuve :** Supposons que $(T_n)$ soit une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$. Montrons d'abord que, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x)$ est une suite de Cauchy dans $F$. Si $x = 0_E$, alors $T_n(x) = 0_F$, et le résultat est évident. Supposons maintenant que $x \ne 0$. Fixons $\epsilon > 0$. Comme $(T_n)$ est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \ge n_0,\ \forall p \ge 0, \qquad \|T_n - T_{n+p}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \frac{\epsilon}{\|x\|_E}$$

Par conséquent,

$$\forall n \ge n_0,\ \forall p \ge 0, \qquad \|T_n(x) - T_{n+p}(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \|T_n - T_{n+p}\|_{\mathcal{L}(E,F)}\ \|x\|_E\ \le\ \frac{\epsilon}{\|x\|_E}\|x\|_E = \epsilon$$

Donc la suite $(T_n(x))$ est de Cauchy dans l'espace complet $E$ : elle admet une limite notée $T(x)$.

Comme les $T_n$ sont linéaires, on voit facilement que $T$ l'est aussi. Montrons que $T$ est continue. Pour cela, on note que, puisque la suite $(T_n)$ est de Cauchy, la suite de nombres réels $(\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ l'est aussi, puisque

$$\left|\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} - \|T_{n+p}\|_{\mathcal{L}(E,F)}\right| \leq \|T_n - T_{n+p}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \qquad \forall n, p \geq 0 \ .$$

Donc, comme $\mathbb{R}$ est complet, cette suite $(\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ converge et, en particulier, est bornée par une constante $M$. On a alors

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E \leq M\|x\|_E \qquad \forall x \in E, \ \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

On fait tendre $n$ vers $+\infty$, ce qui donne, puisque $T_n(x) \to T(x)$ et la norme $\|\cdot\|_E$ est continue,

$$\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E \qquad \forall x \in E \ .$$

Cela montre que $T$ est continue.

Montrons finalement que $T_n$ tend vers $T$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ : fixons $\epsilon > 0$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \ \forall p \geq 0, \qquad \|T_n - T_{n+p}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \epsilon$$

(un tel $n_0$ existe puisque $(T_n)$ est de Cauchy). On a alors

$$\|T_n(x) - T_{n+p}(x)\|_F \leq \epsilon \qquad \forall n \geq n_0, \ p \geq 0, \ x \in E \text{ avec } \|x\|_E \leq 1$$

On fait tendre $p$ vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus : $T_{n+p}(x)$ tend vers $T(x)$, ce qui donne

$$\|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \epsilon \qquad \forall n \geq n_0, \ x \in E \text{ avec } \|x\|_E \leq 1$$

Donc

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\{\|T_n(x) - T(x)\|_F \mid x \in E, \ \|x\|_E \leq 1\} \leq \epsilon \qquad \forall n \geq n_0 \ .$$

En conclusion, la suite de Cauchy $(T_n)$ tend vers $T$ : cela prouve que $\mathcal{L}(E,F)$ est complet. □

### 1.1.4 Produits d'EVN

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN. On munit (le plus souvent) le produit $E \times F$ d'une des normes équivalentes suivantes :

$$\|(x,y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F, \qquad \|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\},$$

$$\|(x,y)\|_2 = \left(\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall (x,y) \in E \times F \ .$$

(le fait que ces normes sont équivalentes vient juste du fait que, sur $\mathbb{R}^2$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes).

**Proposition 1.14** *Si $E$ et $F$ sont des espaces de Banach, alors $E \times F$ (muni d'une des normes ci-dessus), l'est également.*

**Preuve :** exercice. □

**Définition 1.15 (Applications bilinéaires)** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois EVN. On dit que l'application $T : E \times F \to G$ est bilinéaire si l'applications $x \to T(x,y)$ est linéaire pour tout $y \in F$ et l'application $y \to T(x,y)$ est linéaire pour tout $x \in E$.*

**Remarque :** Une application bilinéaire n'est linéaire...que si elle est nulle (car $T(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 T(x,y)$).

**Proposition 1.16** *Soit $T : E \times F \to G$ est une application bilinéaire. Alors $T$ est continue sur $E \times F$ si et seulement si il existe une constante $C$ telle que*

$$\|T(x,y\|_G \leq C\|x\|_E\|y\|_F \qquad \forall (x,y) \in E \times F \ .$$

**Preuve :** exercice. □

## 1.2 Espaces de Hilbert

### 1.2.1 Produit scalaire et norme associée

Commençons par le cas des espaces vectoriels réels.

**Définition 1.17 (Produit scalaire réel)** *Soit $H$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. On appelle* **produit scalaire** *sur $H$ toute application $B : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique, définie positive, i.e.,*

*(i) $B$ est une forme bilinéaire sur $H$,*

*(ii) $B$ est symétrique, i.e.,*

$$B(x,y) = B(y,x) \qquad \forall (x,y) \in H \times H \ ,$$

*(iii) $B$ est définie positive :*

$$B(x,x) \geq 0 \qquad \forall x \in H \qquad \text{et} \qquad \text{si } B(x,x) = 0, \text{ alors } x = 0_H \ .$$

**Définition 1.18 (Produit scalaire complexe)** *Soit $H$ un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. On appelle* **produit scalaire** *sur $H$ toute application $B : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinéaire, hermitienne, définie positive, i.e.,*

*(i) $B$ est une forme sesquilinéaire sur $H$, i.e.,*

*a) pour tout $y \in H$, l'application $x \to B(x,y)$ (de $H$ dans $\mathbb{C}$) est linéaire,*

*b) pour tout $x \in H$, l'application $y \to B(x,y)$ (de $H$ dans $\mathbb{R}$) est anti-linéaire ($B(x, \lambda y + z) = \bar{\lambda} B(x,y) + B(x,z)$ pour tout $x,y,z \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$),*

*(ii) $B$ est hermitienne, i.e.,*

$$B(x,y) = \overline{B(y,x)} \qquad \forall (x,y) \in H \times H \ ,$$

*(iii) $B$ est définie positive :*

$$B(x,x) \geq 0 \qquad \forall x \in H \qquad \text{et} \qquad \text{si } B(x,x) = 0, \text{ alors } x = 0_H \ .$$

**Remarque:** si $B$ est hermitienne, alors $B(x,x)$ est réel puisque $B(x,x) = \overline{B(x,x)}$.

Le plus souvent un produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ au lieu de $B$.

**Proposition 1.19** *Soit $H$ un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors, si on pose*

$$\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall x \in H \tag{1}$$

*on a :*

*(i)*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathcal{R}e(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2 \qquad \forall x,y \in H\ .$$

*(ii) (Cauchy-Schwarz)*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\ \|y\| \qquad \forall x,y \in H\ .$$

*(iii) (Identité du parallélogramme)*

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \qquad \forall x,y \in H\ .$$

*(iv) $\|\cdot\|$ définit une norme sur $H$.*

**Preuve** (dans le cas complexe par exemple) :

(i) Si $x,y \in H$, alors

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\mathcal{R}e(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2\end{aligned}$$

(ii) (Cauchy-Schwarz) soient $x,y \in H$. Si $\langle x,y\rangle = 0$, le résultat est évident. Sinon, soit $\theta$ un argument du nombre complexe $\langle x,y\rangle$. On a alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|x+\lambda e^{i\theta}y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\mathcal{R}e(e^{-i\theta}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda|\langle x,y\rangle| + |\lambda|^2\|y\|^2\ .$$

Comme le polynôme à coefficients réels $\lambda \to \|x\|^2 + 2\lambda|\langle x,y\rangle| + \lambda^2\|y\|^2$ ne prend pas de valeur négative, son discriminant est négatif ou nul : $4|\langle x,y\rangle|^2 - 4\|x\|^2\ \|y\|^2 \leq 0$, ce qui donne l'inégalité annoncée.

(iii) (Identité du parallélogramme) si $x,y \in H$, on a

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathcal{R}e(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathcal{R}e(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|2)$$

(iv) $\|\cdot\|$ définit une norme sur $H$. Nous ne montrons que l'inégalité triangulaire, le reste étant laissé en exercice :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathcal{R}e(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2 \qquad \text{(par Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

□

**Exemples**

- sur $\mathbb{R}^N$, le produit scalaire usuel est défini par :

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i \qquad \forall x = (x_1,\ldots,x_N),\ y = (y_1,\ldots,y_N) \in \mathbb{R}^N\ .$$

- de même sur $\mathbb{C}^N$, le produit scalaire usuel est défini par :

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^N x_i \bar{y}_i \qquad \forall x = (x_1,\ldots,x_N),\ y = (y_1,\ldots,y_N) \in \mathbb{C}^N\ .$$

- L'espace $L^2_\mu(X,\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_X fg d\mu \qquad \forall f,g \in L^2\ ,$$

- En particulier, le prototype des espaces de Hilbert est l'espace $\ell^2$ des suites $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de carré sommable : $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2 < +\infty$. Cet espace est muni du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \qquad \forall x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}},\ y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2 .$$

**Définition 1.20** *Soit $H$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On dit que $H$ est un espace de Hilbert si $H$, muni de la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (par (1)) est un espace complet.*

**Remarque:** Tout espace de Hilbert est un espace de Banach. La réciproque est fausse : en général une norme quelconque ne provient pas d'un produit scalaire (exercice : montrer que, si $H = \mathbb{R}^N$, il n'existe pas de produit scalaire $B$ tel que $B(x,x) = \|x\|_\infty^2$).

### 1.2.2 Le théorème de projection

Ce théorème est le résultat une des propriétés les plus importantes des espaces de Hilbert.

Rappelons d'abord quelques notions élémentaires sur les ensembles convexes.

**Définition 1.21 (Ensemble convexe)** *Soit $E$ un espace vectoriel. On dit qu'un sous-ensemble $C$ de $E$ est convexe si*

$$\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x + (1-\lambda)y \in C .$$

Par exemple, un sous-espace vectoriel de $E$ est toujours convexe.

**Définition 1.22 (Fonction convexe)** *Soit $E$ un espace vectoriel et $C$ un sous-ensemble convexe de $E$. Une application $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe si*

$$\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) .$$

Voici quelques propriétés classiques des ensembles convexes (leur preuve est un bon exercice) :

1. Une intersection quelconque de convexes est convexe.
2. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe, alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) \le c\}$ est convexe.

**Théorème 1.23 (de projection (cas réel))** *Si $H$ est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $F$ est un sous-ensemble convexe complet non vide de $H$, pour tout $x \in H$ il existe un unique point $\Pi_F(x) \in F$ (appelé le projeté de $x$ sur $F$) tel que*

$$\|x - \Pi_F(x)\| = \min_{y\in F} \|y - x\| .$$

*De plus, $\Pi_F(x)$ est caractérisé par l'inégalité suivante :*

$$\langle x - \Pi_F(x), y - \Pi_F(x)\rangle \le 0 \qquad \forall y \in F .$$

**Remarks 1.24** 1. Le théorème s'applique en particulier, lorsque $H$ est un espace de Hilbert et et $F$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de $H$ : en effet, un sous-ensemble fermé d'un espace complet est complet.

2. Dans la cas où $H$ est complexe et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire complexe, le théorème s'applique sous les mêmes hypothèses et la caractérisation prend la forme suivante :

$$\mathcal{R}e(\langle x - \Pi_F(x), y - \Pi_F(x)\rangle) \le 0 \qquad \forall y \in F .$$

Il faut connaître la preuve de la partie “unicité” du théorème.

**Preuve :** Commençons par l'unicité (*): soient $z_1$ et $z_2$ deux projections du points $x$ sur $F$. Notons que, par convexité de $F$, le point $(z_1+z_2)/2$ appartient aussi à $F$. Par définition du projeté, on a donc

$$\|\frac{z_1+z_2}{2}-x\| \geq \|z_1-x\| = \|z_2-x\| \ .$$

Appliquons maintenant l'identité du parallélogramme aux vecteurs $z_1-x$ et $z_2-x$, on a

$$\|z_1+z_2-2x\|^2+\|z_1-z_2\|^2 = 2(\|z_1-x\|^2+\|z_1-x\|^2) \leq 4\|\frac{z_1+z_2}{2}-x\|^2$$

Donc $\|z_1-z_2\|^2 \leq 0$, ce qui prouve que $z_1=z_2$.

Prouvons maintenant l'existence. Comme $F$ est non vide, il existe un point $\bar{z} \in F$ et donc $\bar{m} := \inf_{z\in F}\|z-x\|$ est bien défini. Soit $(z_n)$ une suite minimisante du problème : $z_n \in F$ et $\lim_{n\to+\infty}\|z_n-x\| = \bar{m}$. L'objectif est de montrer que $(z_n)$ est une suite de Cauchy de $F$. Soit $\epsilon>0$ et $N\geq 0$ tel que $\|z_n-x\| \leq \bar{m}+\epsilon$ pour tout $n\geq N$. Fixons $n,m\geq N$. On applique l'égalité du parallélogramme à $z_n-x$ et $z_m-x$.

$$\|z_n+z_m-2x\|^2+\|z_-n-z_m\|^2 = 2(\|z_n-x\|^2+\|z_m-x\|^2) \leq 4(\bar{m}+\epsilon)^2$$

Or, comme le point $\frac{z_n+z_l}{2}$ appartient à $F$ par convexité de $F$, on a $\|\frac{z_1+z_2}{2}-x\| \geq \bar{m}$. L'inégalité ci-dessus se réécrit donc

$$4\bar{m}^2+\|z_-n-z_m\|^2 \leq 4(\bar{m}+\epsilon)^2 \ ,$$

ce qui donne

$$\|z_-n-z_m\|^2 \leq 4(\bar{m}+\epsilon)^2-4\bar{m}^2 = 4\epsilon(2\bar{m}+\epsilon) \ .$$

Comme le membre de droite est arbitrairement petit lorsque $\epsilon\to 0$, la suite $(z_n)$ est bien de Cauchy. Or $F$ est complet, donc cette suite converge vers une limite $\bar{z}\in F$. Comme la norme est continue, on a finalement,

$$\bar{m} = \lim_{n\to+\infty}\|x-z_n\| = \|x-\bar{z}\|$$

et $\bar{z}$ est la projection de $x$ sur $F$.

Montrons maintenant la caractérisation. Vérifions d'abord que $\Pi_F(x)$ satisfait l'inégalité : fixons $z\in F$ et, pour $t\in]0,1]$, considérons le point $(1-t)\Pi_F(x)+tz$, qui appartient à $F$ puisque $F$ est convexe. On a donc, par définition du projeté,

$$\|\Pi_F(x)-x\|^2 \leq \|(1-t)\Pi_F(x)+tz-x\|^2 = \|\Pi_F(x)-x\|^2+2t\langle\Pi_F(x)-x, z-\Pi_F(x)\rangle+t^2\|z-\Pi_F(x)\|^2 \ .$$

On simplifie par $\|\Pi_F(x)-x\|^2$, on divise par $t>0$ et on fait tendre $t$ vers $0$ pour obtenir $0 \leq 2\langle\Pi_F(x)-x, z-\Pi_F(x)\rangle$. Ceci est l'inégalité voulue.

Inversement, soit $\bar{z}\in F$ un point vérifiant l'inégalité de caractérisation. Montrons que $\bar{z}$ est le projeté de $x$ sur $F$. On a, pour tout $z\in F$,

$$\|z-x\|^2 = \|z-\bar{z}+\bar{z}-x\|^2 = \|z-\bar{z}\|^2+2\langle z-\bar{z},\bar{z}-x\rangle+\|\bar{z}-x\|^2$$

Comme $\|z-\bar{z}\|^2\geq 0$ et $\langle z-\bar{z},\bar{z}-x\rangle$ par inégalité de caractérisation, on obtient $\|z-x\|^2 \geq \|\bar{z}-x\|^2$, ce qui prouve que $\bar{z}$ est la projeté de $x$ sur $F$.

□

Lorsque l'ensemble $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $H$, le théorème de projection prend la forme suivante :

**Théorème 1.25 (Projection sur un SEV)** *On suppose que $H$ est un espace de Hilbert et que $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H$. Alors* *(i) l'application* $x \to \Pi_F(x)$ *est linéaire continue, de norme* 1 *si* $F$ *n'est pas réduit à* $\{0_H\}$.

*(ii) c'est une projection :* $\Pi_F \circ \Pi_F = \Pi_F$

*(iii) on a l'égalité*

$$\langle x - \Pi_F(x), y\rangle = 0 \qquad \forall y \in F\ .$$

*(iv) cette égalité caractérise* $\Pi_F(x)$.

$\Pi_F(x)$ s'appelle la projection orthogonale de $x$ sur $F$.

**Preuve (*):** Montrons d'abord la caractérisation : vu le théorème de projection (cas convexe), il suffit de vérifier que, lorsque $F$ est un espace vectoriel, la condition

$$(*) \qquad \langle x - \bar z, y - \bar z\rangle \leq 0 \qquad \forall y \in F\ .$$

est équivalente à la condition

$$(**) \qquad \langle x - \bar z, y\rangle = 0 \qquad \forall y \in F\ .$$

Supposons d'abord $(*)$. Soit $y \in F$. Alors, comme $F$ est un espace vectoriel et $\bar z \in F$, $y + \bar z$ appartient aussi à $F$. Donc, par $(*)$, $\langle x - \bar z, y + \bar z - \bar z\rangle = \langle x - \bar z, y\rangle \leq 0$. Ceci est vrai aussi pour $-y$, qui appartient aussi à $F$ : $\langle x - \bar z, -y\rangle \leq 0$. Donc $(**)$ est vrai.

Inversement, si $\bar z$ satisfait $(**)$, alors pour tout $y \in F$, on a $y - \bar z \in F$ par linéarité de $F$, et donc, par $(**)$, $\langle x - \bar z, y - \bar z\rangle = 0$. Donc $(*)$ est vérifiée.

On fois connue la caractérisation du projeté, la linéarité de l'application $x \to \Pi_F(x)$ est évidente : en effet, soient $x_1, x_2 \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tout $y \in H$,

$$\langle x_1 + \lambda x_2 - (\Pi_F(x_1) + \lambda \Pi_F(x_2)), y\rangle = \langle x_1 - \Pi_F(x_1), y\rangle + \lambda\langle x_2 - \Pi_F(x_2), y\rangle = 0\ ,$$

Donc $\Pi_F(x_1 + \lambda x_2) = \Pi_F(x_1) + \lambda \Pi_F(x_2)$ d'après la caractérisation, ce qui prouve la linéarité de $\Pi_F$.

Montrons maintenant que $\|\Pi_F\| = 1$. Soit $z \in F$, avec $z \neq 0$. On a $\Pi_F(z) = z$, et donc $\|\Pi_F\| \geq \|\Pi_F(z)\|/\|z\| = 1$. Inversement, si $x \in H$, alors d'après la caractérisation, $\langle x - \Pi_F(x), y\rangle = 0$ pour tou $y \in F$. Donc

$$\|\Pi_F(x)\|^2 = \langle \Pi_F(x), \Pi_F(x)\rangle = \langle x, \Pi_F(x)\rangle \leq \|x\|\ \|\Pi_F(x)\|$$

ce qui prouve que $\|\Pi_F(x) \leq \|x\|$. Donc $\|\Pi_F\| = 1$.

Finalement, $\Pi_F \circ \Pi_F = \Pi_F$ par définition de la projection. □

### 1.2.3 Orthogonalité

Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. On dit que deux vecteurs $x, y \in H$ sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

**Définition 1.26 (Orthogonal d'une partie)** *Soit* $A$ *un sous-ensemble non vide de* $H$. *L'orthogonal de* $A$ *est le sous-ensemble* $A^\perp$ *de* $H$ *défini par*

$$A^\perp = \{x \in H \mid \langle x, y\rangle = 0 \qquad \forall y \in A\}$$

**Remarque 1.27** Si $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H$, alors, d'après la caractérisation de la projection, on a $x - \Pi_F(x) \in F^\perp$ pour tout $x \in F$.

**Proposition 1.28** *Soit* $A$ *un sous-ensemble non vide de* $H$.

*(i)* $A^\perp$ *est toujours un sous-espace vectoriel fermé de* $H$*.*

*(ii)* $H^\perp = \{0_H\}$ *et* $\{0_H\}^\perp = H$*.*

*(iii) Si* $A \subset B$*, alors* $B^\perp \subset A^\perp$*.*

*(iv)* $(\ \overline{Vect(A)}\ )^\perp = A^\perp$ *(où* $\overline{Vect(A)}$ *est la fermeture de* $Vect(A)$*).*

**Preuve (*):** (i) Montrons que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel : si $z_1, z_2 \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, pour tout $y \in A$, $\langle z_1 + \lambda z_2, y\rangle = \langle z_1, y\rangle + \lambda\langle z_2, y\rangle = 0$. Donc $z_1 + \lambda z_2 \in A^\perp$, ce qui prouve que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel. Montrons maintenant que $A^\perp$ est fermé : si $(y_n)$ est une suite d'éléments de $A^\perp$ qui tend vers $z \in F$, on a, pour tout $y \in A$, $\langle z, y\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle z_n, y\rangle = 0$. Cela montre que $z \in A^\perp$, qui est donc fermé.

(ii) Si $z \in H^\perp$, alors, comme $z \in H$, $\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = 0$, ce qui prouve que $z = 0$. Donc $H^\perp = \{0_H\}$. Il est clair que $\{0_H\}^\perp = H$.

(iii) est une application directe de la définition.

(iv) Comme $A \subset \overline{Vect(A)}$, l'inclusion $(\ \overline{Vect(A)}\ )^\perp \subset A^\perp$ est immédiate. Soit maintenant $z \in A^\perp$. Alors, si $y$ est une combinaison linéaire d'éléments de $A$, c'est-à-dire si $y \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ avec $y_i \in A$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle z, \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle z, y_i\rangle = 0 \qquad \text{puisque } \langle z, y_i\rangle = 0 \text{ car } z \in A^\perp\ .$$

Donc $z \in (Vect(A))^\perp$. D'autre part, si $y \in \overline{Vect(A)}$, il existe une suite $(y_n)$ d'éléments de $Vect(A)$ telle que $y_n \to y$. Or $\langle z, y_n\rangle = 0$ et le produit scalaire est continu. Donc $\langle z, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $z \in (\ \overline{Vect(A)}\ )^\perp$. □

**Proposition 1.29** *Soit* $F$ *un sous-ensemble de* $H$*.*

*(i)* $F$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $H$ *si et seulement si* $(F^\perp)^\perp = F$*.*

*(ii) Dans ce cas,* $H = F \oplus F^\perp$ *et* $id_H = \Pi_F + \Pi_{F^\perp}$*.*

**Preuve (*):** (i) Supposons que $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H$. Soit $z \in F$ et $y \in F^\perp$. Alors $\langle z, y\rangle = 0$, et donc $F \subset (F^\perp)^\perp$. Inversement, soit $z \in (F^\perp)^\perp$. Soit $\Pi_F(z)$ le projeté de $z$ sur $F$. Par caractérisation, on a $\langle z - \Pi_F(z), y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$, et donc $z - \Pi_F(z) \in F^\perp$. Mais $z \in (F^\perp)^\perp$, et donc $0 = \langle z - \Pi_F(z), z\rangle$. Rappelons que l'application linéaire continue $\Pi_F$ est de norme 1, ce qui prouve que $\|\Pi_F(z)\| \leq \|z\|$. D'où

$$\|z\|^2 = \Pi_F(z), z\rangle \leq \|\Pi_F(z)\|\ \|z\| \leq \|z\|^2\ .$$

Il y a donc une égalité dans Cauchy-Schwarz, ce qui prouve que $\Pi_F(z) = \lambda z$ avec $\lambda \geq 0$. De l'égalité $0 = \langle z - \Pi_F(z), z\rangle$ on tire facilement que $\lambda = 1$, ce qui prouve que $z = \Pi_F(z)$, c'est-à-dire que $z \in F$.

Supposons maintenant que $(F^\perp)^\perp = F$, alors, comme $(F^\perp)^\perp = F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H$, $F$ est fermé.

(ii) On a, pour tout $x \in H$, $x = \Pi_F(x) + x - \Pi_F(x)$ avec $\Pi_F \in F$ et $x - \Pi_F(x) \in F^\perp$. Donc $H = F + F^\perp$. Or $F \cap F^\perp = \{0_H\}$ car si $z \in F \cap F^\perp$, alors $\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = 0$. D'où $H = F \oplus F^\perp$. L'égalité $x = \Pi_F(x) + x - \Pi_F(x)$ pour tout $x \in H$ montre aussi que $id_H = \Pi_F + \Pi_{F^\perp}$. □

### 1.2.4 Bases hilbertiennes

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $A$ de $H$ est *totale* si l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par $A$ est égal à $H$ tout entier : , $\overline{Vect(A)} = H$.

**Proposition 1.30** *$A$ est totale si et seulement si $A^\perp = \{0_H\}$.*

Noter que c'est l'implication "$A^\perp = \{0_H\} \Rightarrow A$ est totale" qui est utile en pratique.

**Preuve (*):** Si $A$ est totale, alors

$$A^\perp = (\ \overline{Vect(A)}\ )^\perp = H^\perp = \{0_H\}$$

Supposons maintenant que $A^\perp = \{0_H\}$. Alors

$$\overline{Vect(A)} = \Big( (\ \overline{Vect(A)}\ )^\perp \Big)^\perp = \Big( A^\perp \Big)^\perp = (\{0_H\})^\perp = H\ .$$

□

**Définition 1.31 (Base hilbertienne)** *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H$. On dit que cette famille est une base hilbertienne de $H$ si elle est totale et orthonormée :*

$$(Vect(\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}))^\perp = \{0_H\} \qquad \text{et} \qquad \langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ .$$

**Définition 1.32 (Espace séparable)** *On dit qu'un EVN $(E, \|\cdot\|)$ est séparable si $E$ contient une famille dénombrable dense.*

**Exemples et contre-exemple :** Une grande partie des espaces utilisés en analyse fonctionnelle sont séparables.

1. si $a < b$, $(\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable : en effet $\mathbb{Q}[X]$ est une famille dénombrable dense (c'est une conséquence directe du théorème de Stone-Weiestrass, qui dit que toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes).

2. les espaces $\ell^p$ (pour $1 \leq p < +\infty$) sont séparables. En effet si on note $\mathcal{D}_0$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang et à coefficients dans $\mathbb{Q}$, alors $\mathcal{D}_0$ est dénombrable et dense dans $\ell^p$ (voir les exercices).

3. Si $I$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p < +\infty$, alors l'espace $L^p(I)$ est séparable. (admis)

4. Par contre ni $\ell^\infty$, ni $L^\infty([a,b])$ ne sont séparables. Montrons-le pour $\ell^\infty$ : soit $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \ell^\infty$ l'application qui à une partie $E$ de $\mathbb{N}$ associe la suite

$$\Phi(E) = (\Phi(E)_i)_{i\in\mathbb{N}} \qquad \text{où } \Phi(E)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, par définition,

$$\|\Phi(E) - \Phi(E')\|_\infty = 1 \qquad \forall E, E' \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ avec } E \neq E'\ . \tag{2}$$

Montrons maintenant que cela implique que $\ell^\infty$ n'est pas séparable. En effet, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite dénombrable dense $(x^n)$ dans $\ell^\infty$. A tout $E \in \mathcal{P}(E)$ il existerait un plus petit entier $n_E$ tel que $\|x^{n_E} - \Phi(E)\|_\infty \leq 1/4$ puisque $(x^n)$

est dense dans $\ell^\infty$. Notons que l'application $E \to n_E$ est injective, puisque si $n_E = n'_E$, alors $x^{n_E} = x^{n'_E}$ et

$$\|\Phi(E) - \Phi(E')\|_\infty \leq \|\Phi(E) - x^{n_E}\|_\infty + \|xn'_E - \Phi(E')\|_\infty \leq \frac{1}{2} ,$$

ce qui implique que $E = E'$ d'après (2). Mais comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable tandis que $\mathbb{N}$ est dénombrable, il ne peut exister d'injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}$. Une contradiction.

**Théorème 1.33** *Tout espace de Hilbert séparable possède au moins une base hilbertienne.*

Il faut connaître la preuve de ce résultat : elle fournit une procédure constructive d'une base hilbertienne (procédé d'orthonormalisation de Schmidt).

**Preuve (*):** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $H$. On note $F_n$ l'espace vectoriel engendré par $\{x_1, \dots, x_n\}$. Notons que $\bigcup_n F_n$ est dense dans $H$, puisque cet espace vectoriel contient tous les $x_n$. Nous allons construire explicitement une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite strictement croissante d'indices $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée de $F_{k_n}$.

Sans perte de généralité on peut supposer que $x_1 \neq 0$. On pose alors $e_1 = x_1/\|x_1\|$ et $\{e_1\}$ est une base orthonormée de $F_1$. Supposons construits $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $k_n$. Soit $k_{n+1}$ le plus petit indice $k > k_n$ tel que $F_k \neq F_{k_n}$. Alors la famille $\{e_1, \dots, e_n, x_{k_{n+1}}\}$ est une base de $F_{k_{n+1}}$. Posons

$$e'_{n+1} = x_{k_{n+1}} - \sum_{i=1}^{n} \langle x_{k_{n+1}}, e_i\rangle e_i .$$

Notons que $\langle e'_{n+1}, e_j\rangle = 0$ pour tout $j \leq n$ et que $e'_{n+1} \neq 0$ puisque $x_{k_{n+1}}$ n'est pas combinaison linéaire des $e_1, \dots, e_n$. On pose alors $e_{n+1} = e'_{n+1}/\|e'_{n+1}\|$. On montre facilement que $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ est une base orthonormée de $F_{k_{n+1}}$. On conclut à l'existence de la famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.

Par construction, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthornormée. Elle est également totale puisque $Vect(e_n,\ n \in \mathbb{N}) = \bigcup_n F_n$ et que ce dernier espace est dense dans $H$. □

**Théorème 1.34** *Soit $H$ un espace de Hilbert séparable, muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \Phi\ :\ \ & H \to \ell^2 \\ & x \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

*est une application linéaire bijective et isométrique. En particulier, on a les égalités*

- *(Bessel)* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$
- *(Parseval)* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$

**Preuve (*):** L'application $\Phi$ est clairement linéaire. Montrons qu'elle est continue : en effet, notons $F_n$ l'espace vectoriel engendré par $\{e_1, \dots, e_n\}$. Alors, si $x \in H$, alors on montre aisément que $\Pi_{F_n}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$ et on sait que $x = \Pi_{F_n}(x) + \Pi_{F_n^\perp}(x)$, où les deux vecteurs sont orthogonaux. Donc, par Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|\Pi_{F_n}(x)\|^2 + \|\Pi_{F_n^\perp}(x)\|^2 \geq \|\Pi_{F_n}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 .$$

Lorsque $n \to +\infty$, on a alors

$$\|\Phi(x))\|^2 = \sum_i \langle x, e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2 . \tag{3}$$

Donc $\Phi$ est continue avec $\|\Phi\| \leq 1$.

Montrons maintenant qu'en fait l'égalité a lieu dans (3). En effet comme la famille $\{e_n\}$ est totale, il existe une suite $(y_k)$ de $Vect(x_n,\ n \in \mathbb{N})$ qui converge vers $x$. Par définition de $F_n$, pour tout $k$, il existe $n_k$ telle que $y_k \in F_{n_k}$. Comme la suite des espaces vectoriels $(F_n)$ est croissante, on peut supposer sans perte de généralité que la suite $n_k$ est strictement croissante, et donc tend vers $+\infty$. Alors, par définition de la projection, on a

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n_k} \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2 - \|\Pi_{F_{n_k}}(x)\|^2 = \|x - x_{n_k}\|^2 \leq \|x - y_{n_k}\|^2 \to 0 \ ,$$

ce qui prouve l'égalité de Bessel. Cette égalité affirme en particulier que $\Phi$ est une isométrie. En passant, nous avons également montré l'égalité de Parseval :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i = \lim_{n\to+\infty} x_n = x \ .$$

Montrons maintenant que $\Phi$ est bijective. D'abord $\Phi$ est clairement injective, car si $\Phi(x) = 0$, alors

$$\|x\| = \|\Phi(x)\| = \|0\| = 0 \ .$$

Donc $x = 0$. Montrons finalement que $\Phi$ est surjective. Soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\ell^2$. Posons $x_n = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Alors la suite $(x_n)$ est de Cauchy dans $H$ puisque

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} |y_i|^2$$

et que la série $\sum_i |y_i|^2$ converge. Donc, comme $H$ est complet, $(x_n)$ converge vers un certain $x \in H$. Notons que, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\langle x, e_i \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, e_i \rangle = \lim_{n\to+\infty} y_i = y_i \ .$$

Donc $\Phi(x) = y$, ce qui prouve que $\Phi$ est surjective. $\square$

**Exemples fondamentaux :**

1. Si $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ est l'espace de Hilbert des suites de carré sommable, la famille $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e_i^n = \delta_{in}$ est une base hilbertienne de $\ell^2$.

2. La théorie des séries de Fourier nous apprend que la famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$.

   En particulier, toute fonction de $L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ est limite, dans $L^2$, d'une suite de polynômes trigonométriques.

3. Lorsque l'on revient aux espaces réels, on a : La famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(nx) \right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(nx) \right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2((0, 2\pi), \mathbb{R})$.

### 1.2.5 Dualité

Rappelons que le dual (topologique) $E^*$ d'un EVN $E$ est l'ensemble des applications linéaires *continues* de $E$ dans $\mathbb{R}$. Pour les espaces de Hilbert, on peut identifier $E^*$ et $E$, au sens suivant :

**Théorème 1.35 (de représentation de Riesz)** *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour tout $f \in H^*$, il existe un unique élément $\bar{x} \in H$ tel que*

$$f(y) = \langle y, \bar{x} \rangle \qquad \forall y \in H \ . \tag{4}$$

*De plus l'application $f \mapsto \bar{x}$ de $H^*$ dans $H$ est une application linéaire continue bijective (et d'inverse continu).*

**Preuve :** Soit $f \in H^*$. Si $f$ est l'application nulle, alors $\bar{x} = 0_H$ est bien l'unique vecteur de $H$ vérifiant (4).

Supposons maintenant que $f \not\equiv 0$. Avant de commencer la démonstration, notons que, si $\bar{x}$ existe, alors $\bar{x} \in (Ker(f))^\perp$ puisque, pour tout $y \in Ker(f)$, $\langle \bar{x}, y \rangle = f(y) = 0$. De plus, $f(\bar{x}) = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \|\bar{x}\|^2$. L'objet des calculs suivants est précisément de construire un tel $\bar{x}$.

Comme $f \not\equiv 0$, il existe $x \in H$ tel que $f(x) \neq 0$. Soit $z$ la projection orthogonale de $x$ sur $Ker(f)$ (qui est un sous-espace vectoriel fermé de $H$). Comme $f(x) \neq 0$, on a $z \neq x$. Posons $\bar{x} = (x - z)f(x)/\|x - z\|^2$. Notons d'abord que

$$f(\bar{x}) = \frac{f(x)}{\|x - z\|^2}\left(f(x) - f(z)\right) = \frac{(f(x))^2}{\|x - z\|^2} = \|\bar{x}\|^2 \neq 0 \ .$$

Par définition de la projection orthogonale, on a également

$$\langle y, \bar{x} \rangle = \frac{f(x)}{\|x - z\|^2}\langle y, x - z \rangle = 0 \qquad \forall y \in Ker(f) \ .$$

Soit maintenant $y \in H$ quelconque. Alors $y - f(y)\bar{x}/f(\bar{x})$ appartient à $Ker(f)$. Donc

$$\langle y - f(y)\bar{x}/f(\bar{x}), \bar{x} \rangle = 0 \ ,$$

ce qui prouve que

$$\langle y, \bar{x} \rangle = f(y)\langle \bar{x}, \bar{x}/f(\bar{x}) \rangle = f(y)\frac{\|\bar{x}\|^2}{f(\bar{x})} = f(y) \ .$$

Il existe donc $\bar{x} \in H$ tel que $\langle y, \bar{x} \rangle = f(y)$ pour tout $y \in H$.

Montrons l'unicité de $\bar{x}$ : si $\bar{x}_1 \in H$ est tel que $\langle y, \bar{x}_1 \rangle = f(y)$ pour tout $y \in H$, alors

$$\langle y, \bar{x} - \bar{x}_1 \rangle = 0 \qquad \forall y \in H \ ,$$

ce qui implique que $\bar{x} - \bar{x}_1 = 0_H$ et donc que $\bar{x} = \bar{x}_1$.

Finalement, l'application $\Phi : H \to H^*$ définie par $\Phi(x)(y) = \langle y, x \rangle$ est linéaire, continue car

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)\| &= \sup\{|\Phi(x)(y)| \mid y \in H, \ \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, y \rangle| \mid y \in H, \ \|y\| \leq 1\} \\ &\leq \|x\| \end{aligned} \tag{5}$$

(par Cauchy-Schwarz). Nous avons montré ci-dessus que $\Phi$ est bijective. Notons aussi que $\Phi^{-1}$ est continue car, si $f \in H^*$ et $\bar{x}$ vérifie (4), on a

$$\|\bar{x}\|_H^2 = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = f(\bar{x}) \leq \|f\|_{H^*} \ \|\bar{x}\|_H$$

D'où

$$\|\bar{x}\|_H \leq \|f\|_{H^*} = \|\Phi(\bar{x})\|_{H^*} \qquad \forall \bar{x} \in H \ . \tag{6}$$

En terme de $\Phi$, les inégalités (5) et (6) donnent

$$\|\bar{x}\|_H = \|\Phi(\bar{x})\|_{H^*} \qquad \forall \bar{x} \in H \ ,$$

et donc $\Phi$ est une isométrie de $H$ dans $H^*$. □

### 1.2.6 Le théorème de Lax-Milgram

Un des outils de base pour démontrer l'existence de solution à une équation aux dérivées partielles est le théorème de Lax-Milgram. Pour l'énoncer, nous aurons besoin de la notion suivante :

**Définition 1.36** *Soit $H$ un espace de Hilbert réel et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue. On dit que $a$ est coercive, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2 \qquad \forall x \in H \; .$$

Bien noter que la constant $\alpha$ doit être strictement positive, et ne dépend que de $a$ (et pas de $x$).

**Théorème 1.37 (de Lax-Milgram)** *Soit $H$ un espace de Hilbert réel et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive. Alors, pour tout $f \in H^*$ il existe un unique élément $\bar{x} \in H$ tel que*

$$a(\bar{x}, y) = f(y) \qquad \forall y \in H \; .$$

*De plus, si $a$ est symétrique, $\bar{x}$ est l'unique minimum de la fonctionnelle*

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} a(x,x) - f(x)$$

**Remarque (*):** (Preuve connaître) Lorsque $a$ est symétrique, le théorème possède une démonstration très rapide : en effet, $a$ définit un produit scalaire dont la norme associée, notée $\|\cdot\|_a$, est équivalente à la norme initiale de $H$. En particulier, $H$, muni du produit scalaire $a$, est un espace de Hilbert et $f$ reste une forme linéaire continue sur $H$. Le théorème de représentation de Riesz affirme alors qu'il existe un unique point $\bar{x} \in H$ tel que

$$a(\bar{x}, y) = f(y) \qquad \forall y \in H \; .$$

**Preuve du théorème de Lax-Milgram :** *La preuve de l'unicité est à connaître (*):* Supposons qu'il existe $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ dans $H$ tels que

$$a(\bar{x}_1, y) = f(y) = a(\bar{x}_2, y) \qquad \forall y \in H \; .$$

Alors on a $a(\bar{x}_1 - \bar{x}_2, y) = 0$ pour tout $y$, et donc, en prenant $y = x_1 - x_2$ et en utilisant la coercivité de $a$,

$$0 = a(\bar{x}_1 - \bar{x}_2, \bar{x}_1 - \bar{x}_2) \geq \alpha \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2 \; .$$

Comme $\alpha > 0$, ceci prouve que $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$.

*Montrons maintenant l'existence :* comme $a$ est continue, pour tout $x \in H$ fixé, l'application $y \to a(x, y)$ est une forme linéaire continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc pour tout $x \in H$ un unique élément $A(x) \in H$ tel que

$$\langle A(x), y \rangle = a(x, y) \qquad \forall y \in H \; .$$

On montre sans difficulté que $A : H \to H$ est linéaire et continue. Montrons que $A$ est une bijection.

*$A$ est injective :* Comme $A$ est linéaire, il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0_H\}$. Soit $x \in H$ tel que $A(x) = 0$. Alors

$$0 = \langle A(x), x \rangle = a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$$

par coercivité. Donc $x = 0_H$ et $A$ est injective.

Pour prouver que $A$ est surjective, il suffit de montrer que l'image de $A$ est fermée et dense, ce qui implique que $Im(A) = H$. Dans ce but, notons que, si $x \in H\backslash\{0\}$ et si $y = A(x)$, alors, par hypothèse de coercivité,

$$\alpha\|x\|^2 \leq a(x,x) = \langle A(x), x\rangle = \langle y, x\rangle \leq \|y\|\|x\|$$

Donc, comme $x \neq 0$, on a $\|x\| \leq \|y\|/\alpha$.

*$Im(A)$ est fermé :* Soit $y_n \in Im(A)$ telle que $y_n \to y$. Par définition de $Im(A)$ il existe $x_n \in H$ tel que $A(x_n) = y_n$. Notons que $(x_n)$ est une suite de Cauchy : en effet, comme $(y_n)$ converge, $(y_n)$ est une suite de Cauchy. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que

$$\|y_n - y_{n+p}\| \leq \alpha\epsilon \qquad \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0\ .$$

Mais alors, comme par linéarité $A(x_n - x_{n+p}) = (y_n - y_{n+p})$, on a

$$\|x_n - x_{n+p}\| \leq \frac{\|y_n - y_{n+p}\|}{\alpha} \leq \frac{\alpha\epsilon}{\alpha} = \epsilon \qquad \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0\ .$$

Donc $(x_n)$ est de Cauchy. Comme $H$ est complet, $(x_n)$ converge vers un vecteur $x \in H$, et, par continuité de $A$, on a $A(x) = y$. Cela prouve que $Im(A)$ est fermé.

*$Im(A)$ est dense :* comme $Im(A)$ est un espace vectoriel, il suffit d'établir que $Im(A)^\perp = \{0_H\}$. Soit $x \in Im(A)^\perp$. Alors $\langle A(y), x\rangle = 0$ pour tout $y \in H$. En particulier, pour $y = x$, cela donne

$$0 = \langle A(x), x\rangle = a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2$$

par coercivité. Donc $x = 0_H$ et $Im(A)$ est dense. En conclusion, $A$ est surjective.

Montrons finalement que $A$ est injective. Comme $A$ est linéaire, il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0_H\}$. Soit $x \in H$ tel que $A(x) = 0$. Alors

$$0 = \langle A(x), x\rangle = a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2$$

par coercivité. Donc $x = 0_H$ et $A$ est surjective.

En conclusion, $A$ est une application linéaire bijective de $H$ dans $H$. Si $f \in H^*$, le théorème de Riesz affirme qu'il existe $x_0 \in H$ tel que $f(y) = \langle y, x_0\rangle$. Mais par bijectivité de $A$ il existe un unique $\bar{x} \in H$ tel que $A(\bar{x}) = x_0$. D'où

$$a(\bar{x}, y) = \langle A(\bar{x}), y\rangle = \langle x_0, y\rangle = f(y) \qquad \forall y \in H\ .$$

On suppose finalement que $a$ est symétrique. Soit $\bar{x} \in H$ tel que $a(\bar{x}, y) = f(y)$ pour tout $y \in H$. Alors, pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - f(x) &= \frac{1}{2}\left[a(\bar{x},\bar{x}) + 2a(\bar{x}, x-\bar{x}) + a(x-\bar{x}, x-\bar{x})\right] - f(\bar{x}) - f(x-\bar{x}) \\
&= \Phi(\bar{x}) + a(\bar{x}, x-\bar{x}) - f(x-\bar{x}) + \frac{1}{2}a(x-\bar{x}, x-\bar{x}) \\
&\geq \Phi(\bar{x}) + 0 + \tfrac{\alpha}{2}\|x-\bar{x}\|^2
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\bar{x}$ est l'unique point de minimum de $\Phi$. □