Université Paris-Dauphine
DUMI2E
Année 2012-2013

Analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles (Deuxième partie)

P. Cardaliaguet

Les démonstrations comportant le signe (*) sont à connaître.

Bibliographie : "Analyse fonctionnelle" H. Brézis, Masson.

Table des matières

2 Intégration

2.1 Quelques résultats fondamentaux en intégration

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré : X est un ensemble, $\mathcal{A}$ une tribu sur X et μ une mesure sur $\mathcal{A}$. Un exemple typique est le triplet $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ (i.e., la plus petite tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$) et où la mesure λ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$ (i.e., l'unique mesure sur $\mathcal{B}$ vérifiant $\lambda(]a,b[) = b - a$ pour tout couple de réels $a < b$).
Rappelons qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite *mesurable* si

$$f^{-1}(S) \in \mathcal{A} \qquad \forall S \in \mathcal{B}^1$$

ou, de façon équivalente,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{A} \; .$$

La mesurabilité est une propriété stable par addition, par multiplication, par passage au sup, et par limite simple : si f et g sont mesurables, alors $f+g$, fg, $\sup\{f, g\}$ le sont, et si (f_n) est une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers une fonction f, alors f est également mesurable.

Rappelons également que, si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable et positive, alors $\int_X f(x)d\mu(x)$ est une quantité bien définie, qui appartient à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Lorsque cette quantité est finie, on dit que f est intégrable. Plus généralement, si $f : X \to \mathbb{R}$, on dit encore que f est intégrable si $|f|$ est intégrable (noter que $|f| = \max\{f, -f\}$, donc $|f|$ est encore mesurable). Dans ce cas

$$\int_X f(x)d\mu(x) := \int_X f^+(x)d\mu(x) - \int_X f^-(x)d\mu(x) \qquad \text{où } f^+ = \max\{f, 0\} \text{ et } f^- = \max\{-f, 0\} \; .$$

Rappelons enfin qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ définie pour $x \in X$ est vraie $\mu-$presque partout s'il existe un ensemble de mesure nulle N telle que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X \backslash N$.

Voici quelques inégalités classiques qui permettent de majorer des intégrales :

Proposition 2.1 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

- *(inégalité triangulaire) si f est intégrable, alors*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

- *(inégalité de Jensen) Soit $\mu(X) = 1$ et f intégrable. On suppose que $a < f < b$ $\mu-$p.p. (où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Soit $\Phi :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors*

$$\Phi\left(\int_X f d\mu \right) \leq \int_X \Phi(f) d\mu$$

  où le membre de droite est bien défini et appartient à $]-\infty, +\infty]$.

Voici trois résultats de convergence qu'il faut très bien connaître :

Proposition 2.2 (Convergence monotone) *Si (f_n) est une suite* croissante *de fonctions mesurables,* positives, *alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x) = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n(x)d\mu(x) \; .$$

Lemme 2.3 (de Fatou) *Si* (f_n) *est une suite de fonctions mesurables* positives*, alors*

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)d\mu(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x)$$

Théorème 2.4 (Convergence dominée) *Si* (f_n) *une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout vers une fonction* f *et pour laquelle il existe une fonction intégrable* g *telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \text{pour } \mu\text{−presque tout } x \in X, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors f *est intégrable et*

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \ .$$

Remarque 2.5 De plus, la convergence de (f_n) vers f a lieu au sens L^1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f - f_n| d\mu = 0 \ .$$

2.2 Les espaces L^p

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et p un réel supérieur ou égal à 1. L'espace $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_X |f(x)|^p d\mu(x)$ est finie. Sur $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, on définit la relation d'équivalence $f \sim g$ si $f = g$ μ−p.p. On note $L^p(X, \mu)$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\sim$. L'idée est que l'on peut manipuler les éléments de $L^p(X, \mu)$ à peu près comme ceux de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$: en particulier, si $f, g \in L^p(X, \mu)$, on peut définir $f + g$ en prenant la classe d'équivalence de n'importe somme $\tilde{f} + \tilde{g}$ où $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont des représentants de f et g (exercice).

Lorsque $p = +\infty$, on définit $L^\infty(X, \mu)$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) fonctions qui sont essentiellement bornées : $f \in L^\infty(X, \mu)$ si f est mesurable et s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que $|f| \leq C$ μ−p.p. La norme $\|f\|_\infty$ est alors la plus petite constante C pour laquelle cette inégalité est vérifiée.

Soit $p \in]1, +\infty[$. On appelle exposant conjugué de p le nombre réel p' tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad \text{i.e., } p' = \tfrac{p}{p-1}.$$

En particulier, $p' > 1$. Si par exemple $p = 2$, alors $p' = 2$. Lorsque $p = 1$, on pose par convention $p' = +\infty$, tandis que lorsque $p = +\infty$, on pose $p' = 1$.

Lemme 2.6 (Inégalité de Hölder) *Soit* $p \in [1, +\infty]$ *et* $f \in L^p(X, \mu)$ *et* $g \in L^{p'}(X, \mu)$*, alors* $fg \in L^1(X, \mu)$ *et*

$$\int_X fg \ d\mu \leq \left(\int_X |f|^p \ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^{p'} \ d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Remarque : Une conséquence très importante de l'inégalité de Hölder, est la suite d'inclusion suivantes :

$$\text{si } \mu(X) < +\infty, \text{ alors } \ L^\infty(X) \subset L^p(X) \subset L^r(X) \subset L^1(X) \qquad \forall 1 \leq r \leq p \leq +\infty \ .$$

Par contre, aucune de ces inclusions n'est vraie si $\mu(X) = \infty$.

Pour montrer ces inclusions (*), il suffit de prendre $r < p$ et, si $u \in L^p(X)$, on peut appliquer l'inégalité de Hölder aux fonctions $f = |u|^r$ et $g = 1$ avec le coefficient $\theta = p/r > 1$ et $\theta' = \theta/(\theta-1)$:

$$\int_X |u|^r d\mu \leq \left(\int_X |u|^{r\theta} d\mu\right)^{1/\theta} \left(\int_X 1^{\theta'}\right)^{1/\theta'} = (\mu(X))^{1/\theta'} \left(\int_X |u|^p d\mu\right)^{1/\theta'} < +\infty$$

Donc $u \in L^r(X)$. □

Pour $f \in L^p(X, \mu)$, on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Rappelons l'inégalité de Minkowski : si $f, g \in L^p(X, \mu)$, alors $f + g \in L^p(X, \mu)$ et

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \ .$$

En particulier, $\| \cdot \|_p$ est une norme sur $L^p(X, \mu)$.

Théorème 2.7 (Riesz-Fischer) *L'espace $L^p(X, \mu)$, muni de la norme $\| \cdot \|_p$, est un espace de Banach. Lorsque $p = 2$, l'espace $L^2(X, \mu)$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x) \qquad \forall f, g \in L^2(X, \mu) \ .$$

Rappelons que la convergence dans L^p n'implique pas en général la convergence ponctuelle, ni même la convergence presque partout. Par contre, si (f_n) converge vers f dans L^p (pour $p \in [1, +\infty]$), alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge presque partout vers f.

En effet, supposons que $p < +\infty$ (pour $p = +\infty$ c'est évident). Comme (f_n) est une suite de Cauchy dans L^p, il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 0 \ .$$

Donc, si on pose $g_n = \sum_{k=0}^n |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$, on a $\|g_n\|_p \leq 1$. Par convergence monotone, cela implique que la limite ponctuelle g de la suite croissante (g_n) vérifie également $\|g\|_p \leq 1$. En particulier $X_\infty := \{x \in X \ , \ g(x) = +\infty\}$ est de mesure nulle. Pour tout $x \in X \backslash X_\infty$, on a $\sum_k |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < +\infty$, et donc la série $\sum_k (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ est absolument convergente, donc convergente. On en déduit que la limite $\bar{f}(x)$ de la suite $(f_{n_k}(x))$ existe pour presque tout x. Mais, d'après le lemme de Fatou, on a

$$\int_X |f(x) - \bar{f}(x)|^p d\mu(x) \leq \liminf_{k \to +\infty} \int_X |f(x) - f_{n_k}(x)|^p d\mu(x) = 0$$

où la dernière égalité vient du fait que (f_{n_k}) tend vers f dans L^p. On en déduit que $\bar{f} = f$ p.p., et donc que la suite (f_{n_k}) tend vers f p.p.. □

2.3 Intégration sur un espace produit

Soient $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espace mesurés. On appelle tribu produit de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ la tribu engendrée par le produit $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ (qui n'est pas une tribu en général). On note cette tribu produit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

On montre qu'il existe une unique mesure μ sur $X_1 \times X_2$ telle que

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \qquad \forall (A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \ .$$

Cette mesure est notée $\mu_1 \otimes \mu_2$ et est appelée la mesure produit de μ_1 et μ_2.

Théorème 2.8 (Fubini 1 (pour les fonctions positives)) *Soit $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ une application mesurable par rapport à la tribu produit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et positive. Alors*

1. *L'application $h_1(x_1) := \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$ est mesurable et*
$$\int_{X_1} h_1(x_1) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) \ .$$
2. *L'application $h_2(x_2) := \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$ est mesurable et*
$$\int_{X_2} h_2(x_2) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) \ .$$
3. *En particulier,*
$$\begin{aligned} &\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\ &\quad = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \ . \end{aligned}$$

Toutes les intégrales ci-dessus sont bien définies, et appartiennent à $[0, +\infty]$.

Remarque 2.9 En pratique, le résultat ci-dessus permet de montrer qu'une fonction $f = f(x_1, x_2)$ est intégrable. Lorsque c'est le cas, on peut alors appliquer le théorème de Fubini 2 :

Théorème 2.10 (Fubini 2 (pour les fonctions intégrables)) *Soit $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ une application intégrable par rapport à la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$. Alors*

1. *L'application $h_1(x_1) := \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$ est définie pour μ_1-presque tout x_1, est intégrable, et*
$$\int_{X_1} h_1(x_1) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) \ .$$
2. *L'application $h_2(x_2) := \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$ est définie pour μ_2-presque tout x_2, est intégrable, et*
$$\int_{X_2} h_2(x_2) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) \ .$$
3. *En particulier,*
$$\begin{aligned} &\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\ &\quad = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \ . \end{aligned}$$

Remarque 2.11 Un exemple particulièrement simple d'application est lorsque f_1 et f_2 sont intégrables par rapport à μ_1 et μ_2 respectivement. Alors la fonction $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ est intégrable par rapport à à la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ et
$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) = \left(\int_{X_1} f_1(x_1) d\mu_1(x_1) \right) \left(\int_{X_2} f_2(x_2) d\mu_2(x_2) \right) \ .$$

2.4 Produit de convolution

On travaille ici dans $\mathbb{R}^N$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, positives. On appelle produit de convolution de f et g, noté $f \star g$, l'application

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \ ,$$

lorsque ces quantités sont bien définies et qu'on peut appliquer le théorème de Fubini.

Proposition 2.12 *Voici trois cas où le produit de convolution est bien défini.*

- *Si f et g sont intégrables, alors $(f \star g)(x)$ est défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, $f \star g$ est également intégrable et*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f \star g)(x)dx = \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x)dx\right) .$$

- *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ (avec $p \in [1, +\infty]$ et p' l'exposant conjugué de p), alors $f \star g(x)$ est défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $f \star g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.*
- *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (avec $p \in [1, +\infty]$), alors $(f \star g)(x)$ est défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.*

Remarque 2.13 En particulier, si f et g sont des densités de probabilité, i.e., $f \geq 0$ et $g \geq 0$ p.p. avec

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1 \ ,$$

alors $f \star g$ est également une densité de probabilité. En particulier, si X et Y sont des variables aléatoires réelles de densité respectives f et g, et si X et Y sont indépendantes, alors la variable aléatoire a pour densité $f \star g$.

Preuve de la proposition (*): On suppose d'abord que $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Notons d'abord que l'application $(x,t) \to f(y)g(x-y)$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (on admet la mesurabilité). En effet, en utilisant le théorème de Fubini 1 puis un changement de variable, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |f(y)g(x-y)|dxdy &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y)|dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|dx\right) dy \\
&= \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < +\infty \ .
\end{aligned}$$

Donc $(x,t) \to f(y)g(x-y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, et on a, d'après le théorème de Fubini 2, que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)$ est définie pour presque tout x (ce qui défini $(f \star g)(x)$ pour presque tout x) et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (f \star g)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x-y)dx\right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x)dx\right) dy = \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x)dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y)dy\right)
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tandis que $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a par inégalité de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(y)g(x-y)|dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^p\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y)|^{p'}\right)^{1/p'} = \|f\|_p \|g\|_{p'} < +\infty \ .$$

Donc la fonction $t \to f(y)g(x-y)$ est intégrable, avec

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)g(x-y)|dy \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \ .$$

Supposons pour finir que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (avec $p \in [1,+\infty]$). Par Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\ |g(y)|dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\ |g(y)|^{1/p}|g(y)|^{1/p'}dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p|g(y)|dy\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|dy\right)^{1/p'} \ ,
\end{aligned}$$

où la fonction $|f|^p$ est dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. Donc

$$\begin{aligned}
\|f \star g\|_p^p &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\ |g(y)|dy\right)^p dx \ \leq \ \|g\|_1^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N}\int_R |f(x-y)|^p|g(y)|dy \\
&\leq \|g\|_1^{p-1}\||f|^p\|_1\|g\|_1 = \|f\|_p\|g\|_1
\end{aligned}$$

d'après la première partie du théorème. □

2.5 Régularisation

Fonction continue à support compact : soit $]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On dit qu'une fonction mesurable $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ est à support compact s'il existe un sous-intervalle $[b,c]$ fermé et borné de $]a,b[$ en dehors duquel la fonction f est nulle p.p..

Plus généralement, si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on dit qu'une fonction mesurable $f:\Omega \to \mathbb{R}$ est à support compact s'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que f est nulle p.p. en dehors de K. On appelle support de f le plus petit compact (au sens de l'inclusion) en dehors duquel f est nulle p.p..

Rappelons qu'il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui non identiquement nulles et à support compact dans $\mathbb{R}$: pour construire une telle fonction, on remarque d'abord que la fonction

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, est strictement positive dans $]0,+\infty[$ et nulle dans $]-\infty,0]$. On pose alors $f(x) = \phi(x)\phi(1-x)$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, est positive sur $\mathbb{R}$. De plus $f(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$ et $1-x > 0$: donc f est à support compact et son support est le compact $[0,1]$.

Un tel exemple se généralise aisément à $\mathbb{R}^N$: il suffit de prendre par exemple $\tilde{f}(x) = f(\|x\|^2)$ où f est la fonction construite ci-dessus et $\|x\|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$. La fonction $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et a pour support la boule unité de $\mathbb{R}^N$ qui est compacte.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $k \geq 0$, on note $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ qui sont à support compact dans Ω.

Fonctions localement intégrables : soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$. On dit qu'une fonction mesurable $f:\Omega \to \mathbb{R}$ est localement intégrable si la restriction de f à tout compact de $\mathbb{R}^N$ est intégrable. On note $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Par exemple, les constantes sont localement intégrables dans $\mathbb{R}^N$ (mais seule la constante nulle est intégrable). Notons aussi que, si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, alors le produit fg est intégrable dans Ω.

Proposition 2.14 *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R})$, alors $f \star g$ est bien défini et de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}$. De plus, $(f \star g)^{(r)} = f \star g^{(r)}$ pour tout $r = 1, \ldots, k$.*

De même, si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $g \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^N)$, alors $f \star g$ est bien défini et de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^N$. De plus,

$$\frac{\partial^r (f \star g)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} = f \star \left(\frac{\partial^r g}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \right)$$

pour tout multi-indice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ avec $\alpha_1 + \ldots \alpha_N = r \leq k$.

Preuve * : On ne fait la preuve qu'en dimension $N = 1$, la preuve dans le cas général étant identique. Par argument de récurrence, il suffit aussi de faire la démonstration pour $k = 1$. Comme g est à support compact, il existe un intervalle $[c, d]$ en dehors duquel g est nulle. Pour $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $|h| < 1$ et $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x)}{h} &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\frac{g(x+h-t) - g(x-t)}{h} \right) dt \\ &= \int_{x-1-d}^{x+1-c} f(y) \left(\frac{g(x+h-t) - g(x-t)}{h} \right) dt \end{aligned}$$

Or, si $h_n \to 0$, on a que la suite $\left(f(y) \left(\frac{g(x+h_n-t)-g(x-t)}{h_n} \right) \right)$ tend vers $f(y) g'(x-t)$ pour presque tout $t \in [x-1-d, x+1-c]$ et

$$\left| f(y) \left(\frac{g(x+h_n-t) - g(x-t)}{h_n} \right) \right| \leq |f(y)| \|g'\|_\infty \; p.p.t \; t \in [x-1-d, x+1-c] \, .$$

Or f est intégrable sur le compact $[x-1-d, x+1-c]$ et on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(f \star g)(x+h_n) - (f \star g)(x)}{h_n} = \int_{x-1-d}^{x+1-c} f(y) g'(x-t) dt = (f \star g')(x) \, .$$

Comme ceci est vrai pour toute suite (h_n) qui tend vers 0, on a montré que $f \star g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $(f \star g)' = f \star g'$. Par un argument de convergence dominée, on a aussi que l'application $x \to (f \star g')(x)$ est continue, ce qui prouve que $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^1$. □

Rappelons un résultat essentiel de densité :

Théorème 2.15 *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors $\mathcal{C}^0_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ au sens où : pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et pour $\epsilon > 0$, il existe $f_\epsilon \in \mathcal{C}^0_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_\epsilon\|_p \leq \epsilon$.*

Ce résultat, qui repose sur la construction de l'intégrale de Lebesgue, ne sera pas montré ici.

Approximation par convolution : Soit $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact inclus dans la boule unité $B(0,1)$, avec $\phi \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) dx = 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-N} \phi(\frac{x}{\epsilon})$. On note que ϕ_ϵ a un support inclus dans la boule $B(0, \epsilon)$ et que $\int_{\mathbb{R}^N} \phi_\epsilon(x) dx = 1$.

Théorème 2.16 *Soit $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $u_\epsilon = \phi_\epsilon \star u$. Alors u_ϵ tend vers u dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ lorsque $\epsilon \to 0$.*

Remarques 2.17

1. Si u a un support contenu dans un compact K, alors u_ϵ est également à support compact, avec un support contenu dans l'ensemble $K_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^N \, , \, \exists y \in K, \, \|x - y\| \leq \epsilon\}$ (par exemple, si $N = 1$ et $K = [a, b]$, alors le support de u_ϵ est contenu dans $[a - \epsilon, b + \epsilon]$).

2. Si u est continue et à support compact, la convergence de u_ϵ vers u est uniforme sur $\mathbb{R}^N$.

Preuve * : On suppose d'abord que $u \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N)$. Alors, comme $\int_{\mathbb{R}^N} \phi_\epsilon = 1$, on a

$$u(x) - u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(x-z))\phi_\epsilon(z)dz$$

Comme u est continue et a un support compact, u est uniformément continue : pour tout $\delta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|u(x) - u(y)| \leq \delta$ dès que $|x - y| \leq \eta$. Pour tout $\epsilon \in]0, \eta[$, on a, puisque le support de ϕ_ϵ est contenu dans la boule $B(0, \epsilon)$ et $\phi_\epsilon \geq 0$,

$$\begin{aligned} |u(x) - u_\epsilon(x)| &= \left| \int_{B(0,\epsilon)} (u(x) - u(x-z))\phi_\epsilon(z)dz \right| \\ &\leq \int_{B(0,\epsilon)} |u(x) - u(x-z)|\phi_\epsilon(z)dz \leq \delta \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\epsilon(z)dz = \delta \ . \end{aligned}$$

Donc u_ϵ tend uniformément vers u sur $\mathbb{R}^N$. Comme, pour $\epsilon \in]0, 1]$, u_ϵ et u ont un support contenu dans un même compact K (cf. la remarque ci-dessus), u_ϵ tend aussi vers u dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ par convergence dominée.

Nous traitons maintenant le cas général : soit $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$. On veut montrer que $\|u - u_\epsilon\|_p \to 0$ lorsque $\epsilon \to 0$. Fixons $\delta > 0$. Alors il existe $w \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ tel que $\|u - w\|_p \leq \delta/3$. Posons $w_\epsilon = \phi_\epsilon \star w$. Alors, comme $(w - u) \in L^p$ tandis que $\phi_\epsilon \in L^1$, on a

$$\|w_\epsilon - u_\epsilon\|_p = \|(w - u) \star \phi_\epsilon\|_p \leq \|w - u\|_p \|\phi_\epsilon\|_1 = \|w - u\|_p \leq \delta/3 \ ,$$

puisque $\phi_\epsilon \geq 0$ et $\int \phi_\epsilon = 1$. D'autre part, comme w_ϵ tend vers w dans L^p, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, $\|w_\epsilon - w\|_p \leq \delta/3$. Alors, pour $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, on a

$$\|u - u_\epsilon\|_p \leq \|u - w\|_p + \|w - w_\epsilon\|_p + \|w_\epsilon - u_\epsilon\|_p \leq \delta \ .$$

□

3 Espaces de Sobolev et équations elliptiques linéaires.

La plus grande partie du chapitre se situe en dimension d'espace égale à 1 ; la dimension supérieure n'est abordée que dans la dernière partie.

3.1 Espaces de Sobolev sur un intervalle

3.1.1 Définitions et exemples

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty]$. On notera $\bar{I}$ son adhérence.

On cherche à décrire des fonctions qui n'ont pas de dérivée au sens usuel, mais qui vérifient quand même des relations de dérivation par parties. Pour cela, nous aurons besoin des remarques suivantes :

Lemme 3.1 *Soit $w \in L^p(I)$.*

1. *Si $\displaystyle\int_I w(x)\phi(x)dx = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^1(I)$, alors $w = 0$ p.p. dans I.*
2. *Si $\displaystyle\int_I w(x)\phi'(x)dx = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^1(I)$, alors w est constante : il existe un réel C tel que $w = C$ p.p. dans I.*

Remarque : Bien noter que la réciproque des assertions ci-dessus est évidente.

Preuve :

1. Fixons $a < b$, avec $a, b \in I$ et montrons que $w = 0$ p.p. sur $[a, b]$. Notons que $w \in L^1([a, b])$ puisque $w \in L^p([a, b])$. L'étape-clé consiste à montrer qu'il existe une suite de fonctions $\phi_n \in C_c^1(I)$, bornées par 1, telles que ϕ_n tend vers $\text{sign}(w(x))$ pour presque tout $x \in [a, b]$. En effet, comme $C_c^1([a, b])$ est dense dans $L^1([a, b])$, il existe une suite de fonction $\psi_n \in C_c^1(I)$ qui converge vers $\text{sign}(w)$ dans $L^1([a, b])$ et donc, à une sous-suite près encore notée (ψ_n), presque partout sur $[a, b]$. Soit $\theta : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, croissante, telle que $\theta(0) = 0$, $\theta(-1) = -1$ et $\theta(1) = 1$. Alors la suite de fonctions $(\phi_n = \theta \circ \psi_n)$ vérifie les conditions demandées.

   Par hypothèse, on a $\displaystyle\int_I w(x)\phi_n(x)dx = 0$. Comme $|w(x)\phi_n(x)| \leq |w(x)|$ et $(w(x)\phi_n(x))$ tend vers $w(x)\text{sign}(w(x) = |w(x)|$ dans $[a, b]$ et vers 0 en dehors de $[a, b]$, on a, par convergence dominée, $\displaystyle\int_{[a,b]} |w(x)|dx = 0$, soit $w = 0$ p.p. dans I.

2. Soit maintenant $\phi \in \mathcal{C}_c^1(I)$ et $\eta \in \mathcal{C}_c^1(I)$ avec $\int_I \eta = 1$. Notons qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}_c^1(I)$ tel que $\psi'(x) = \phi(x) - (\int_I \phi(y)dy)\eta(x)$, puisque la fonction $x \to \phi(x) - (\int_I \phi(y)dy)\eta(x)$ est à support compact et d'intégrale nulle. On applique l'hypothèse à ψ pour obtenir

   $$\int_I w(x) \left(\phi(x) - (\int_I \phi(y)dy)\eta(x) \right) dx = 0$$

   Comme

   $$\int_I w(x)(\int_I \phi(y)dy)\eta(x)dx = \int_I \phi(x)(\int_I \phi(x)\eta(x)dx)dy$$

   par Fubini et changement de variable, on a

   $$\int_I \phi(x) \left(w(x) - (\int_I w(y)\eta(y)dy) \right) dx = 0$$

   Comme ceci est vrai pour toute fonction $\phi \in C_c^1(I)$, on en déduit que $w(x) - (\int_I w(y)\eta(y)dy) = 0$ p.p., et donc que w est égal presque partout à la constante $(\int_I w(y)\eta(y)dy)$.

□

Définition 3.2 *On dit qu'une fonction u est dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ si $u \in L^p(I)$ et s'il existe une fonction $w \in L^p(I)$ telle que*

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = -\int_I w(x)\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(I) .$$

L'espace le plus utilisé est lorsque $p = 2$, et on note plutôt $H^1(I) := W^{1,2}(I)$.

Notons que, si I est borné, les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\bar{I}$ appartiennent à tous les espaces $W^{1,p}(I)$. Si I est non borné, c'est le cas de la restriction à I de toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact dans $\mathbb{R}$.

Remarque : La fonction w est définie de façon unique. En effet, si w_1 et w_2 vérifient toutes deux la relation

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = -\int_I w_1(x)\phi(x)dx = -\int_I w_2(x)\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(I) ,$$

alors

$$\int_I (w_1(x) - w_2(x))\phi(x)dx = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(I) .$$

On en déduit (grâce au Lemme 3.1) que $w_1 = w_2$ p.p.. On notera $u' = w$ dans toute la suite. La relation caractérisant u' est donc

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = -\int_I u'(x)\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(I) .$$

Lemme 3.3 *Si u appartient à $W^{1,p}(I)$, alors u possède u représentant continu dans $\bar{I}$ et*

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(t)dt \qquad \forall x, y \in I .$$

A partir de maintenant, nous choisirons systématiquement le représentant continu d'une fonction $u \in W^{1,p}(I)$.

Preuve *: Fixons $x_0 \in I$ et regardons la fonction $\xi(x) = \int_{x_0}^x u'(t)dt$. Fixons maintenant $\phi \in C_c^1(I)$, $a, b \in I$ avec $a < b$ tel que le support de ϕ soit dans $[a, b]$. On a par Fubini

$$\int_I \xi(x)\phi'(x)dx = \int_I \int_a^x u'(t)\phi'(x)\ dtdx = \int_I u'(t) \int_t^b \phi'(x)dx = -\int_I u'(t)\phi(t)dt = \int_I u(x)\phi'(x)dx .$$

Donc $\displaystyle\int_I (\xi(x) - u(x))\phi'(x)dx = 0$ pour toute fonction $\phi \in C_c^1(I)$. Le lemme 3.1 affirme alors qu'il existe une constante C telle que

$$u(x) = C + \xi(x) = C + \int_{x_0}^x u'(t)dt \qquad p.p.\ x \in I .$$

Montrons maintenant que la fonction ξ est continue dans $\bar{I}$. Pour cela, fixons un intervalle $[a, b] \subset \bar{I}$ avec $a < b$ et $x_0 \in]a, b[$, et montrons que ξ est continue dans $[a, b]$. Comme $u' \in L^p(I)$, on a $u' \in L^1([a, b])$. Alors si la suite (x_n) tend vers x dans $[a, b]$, on a

$$\xi(x_n) = \int_{[a,b]} u'(t)\mathbf{1}_{[x_0,x_n]}(t)dt$$

(où l'on suppose implicitement ici que $x_n \geq x_0$, le cas inverse se traitant de même). Notons que la suite de fonction $(u'(t)\mathbf{1}_{[x_0,x_n]}(t))$ tend p.p. vers la fonction $u'(t)\mathbf{1}_{[x_0,x]}(t)$ tandis que $|u'\mathbf{1}_{[x_0,x_n]}| \leq |u'|$ où $|u'|$ est dans $L^1([a,b])$. Donc, par théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \xi(x_n) = \int_{[a,b]} u'(t)\mathbf{1}_{[x_0,x]}(t)dt = \xi(x) \ .$$

Donc $u = C + \xi$ avec ξ continue, ce qui prouve que u possède un représentant continu. De plus, par définition de ξ, on a

$$\xi(y) - \xi(x) = \int_x^y u'(t)dt \qquad \forall x, y \in I \ .$$

□

En fait, lorsque $p > 1$, la régularité des fonctions u de $W^{1,p}(I)$ peut être quantifiée :

Lemme 3.4 *Si $p > 1$ et $u \in W^{1,p}(I)$, alors*

$$|u(y) - u(x)| \leq \|u'\|_p |y - x|^{1-1/p} \qquad \forall x, y \in \bar{I} \ .$$

Preuve *: Fixons $x, y \in I$ avec, pour fixer les idées, $x < y$. En utilisant le résultat précédent ainsi que l'inégalité de Hölder (avec les fonctions $u' \in L^p$ et $v = \mathbf{1}_{[x,y]}$) on obtient, en posant $q = p/(p-1)$ (i.e., $1/q = 1 - 1/p$, avec convention $1/+\infty = 0$),

$$|u(y) - u(x)| = |\int_I \mathbf{1}_{[x,y]}(t)u'(t)dt| \leq \left(\int_I \mathbf{1}^q_{[x,y]}(t)\right)^{1/q} \left(\int_I |u'(t)|^p\right)^{1/p} = |y - x|^{1-1/p}\|u'\|_p$$

□

Théorème 3.5 *L'espace $W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \left(\|u\|_p^p + \|u'\|_p^p\right)^{1/p}$$

De plus, si $p = 2$, l'espace $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int_I u(t)\overline{v(t)}dt + \int_I u'(t)\overline{v'(t)}dt$$

Preuve* : Le fait que $W^{1,p}(I)$ est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$ est une norme sur cet espace est laissé en exercice (facile... à condition de se souvenir que $(a,b) \to (|a|^p + |b|^p)^{1/p}$ est une norme dans $\mathbb{R}^2$).

Montrons que $W^{1,p}(I)$ est complet pour cette norme. Soit (u_n) une suite de Cauchy de $W^{1,p}(I)$. Alors, comme

$$\|u\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}} \qquad \text{et} \qquad \|u'\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}} \qquad \forall u \in W^{1,p} \ ,$$

les suites (u_n) et (u_n') sont de Cauchy dans L^p. Or L^p est complet, donc ces suites convergent vers une limite $u \in L^p$ et $w \in L^p$ respectivement. Reste à montrer que $u \in W^{1,p}$ et que (u_n) tend vers u dans $W^{1,p}$. Par définition de $W^{1,p}(I)$, on a

$$\int_I u_n(x)\phi'(x)dx = -\int_I u_n'(x)\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in C^1_c(I) \ .$$

On passe facilement à la limite dans chacune des expressions, ce qui donne

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = -\int_I w(x)\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in C^1_c(I) \ .$$

Comme u et w sont dans $L^p(I)$, cela prouve que $u \in W^{1,p}(I)$ et que $u' = w$. La convergence de (u_n) vers u dans $W^{1,p}(I)$ est alors une conséquence immédiate de la convergence de (u_n) et (u'_n) vers u et $w = u'$ dans $L^p(I)$. $\square$

On admettra par la suite que si $u \in W^{1,p}(I)$, alors u admet une dérivée (usuelle) égale à $u'(x)$ en presque tout point x de I. Donc, en pratique, pour montrer qu'une fonction donnée appartient à $W^{1,p}(I)$, il suffit

1. de vérifier que $u \in L^p(I)$,
2. de prouver que la dérivée (usuelle) $u'(x)$ de u existe en presque tout point x de I et que $u' \in L^P(I)$,
3. et enfin de vérifier qu'il existe $x_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $u(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} u'(t)dt$.

Attention, le dernier point est essentiel. Par exemple, si $u(x)$ vaut 0 sur $[0, 1/2]$ et 1 sur $[1/2, 1]$, alors $u'(x)$ existe et vaut 0 pour tout $x \neq 1/2$, mais bien sûr, u n'est pas une primitive de 0.

Si $u \in W^{1,p}(I)$ et $x \in I$, alors u est une fonction continue et la quantité $u(x)$ est définie sans ambiguité. On peut aller un peu plus loin lorsque $p > 1$ (et en particulier lorsque $p = 2$) :

Théorème 3.6 (Fonction évaluation) *Pour tout $x \in \bar{I}$, l'application $e_x : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}$, qui à $u \in W^{1,p}(I)$ associe $e_0(u) := u(x)$, est linéaire continue.*

Preuve : L'application est clairement linéaire. Montrons qu'il existe une constante, qui ne dépend que de I et de p, telle que $|e_x(u)| \leq K\|u\|_{W^{1,p}}$. Notons d le diamètre de I (on pose, par exemple, $d = 1$ si le diamètre est infini). Comme I a un intérieur non vide, d est strictement positif. De plus, comme I est un intervalle, soit $[x, x+d/2[\subset \bar{I}$, soit $]x-d/2, x] \subset \bar{I}$. On suppose pour fixer les idées qu'on est dans le premier cas et on pose $I_0 := [x, x + d/2[$. Alors, pour tout $y \in I_0$, on a

$$|u(y)| \geq |u(x)| - |u(y) - u(x)| \geq |u(x)| - |x - y|^{1/q}\|u'\|_{L^p}$$

d'après le théorème précédent. Distinguons deux cas : si $|u(x)| \leq 2|d/2|^{1/q}\|u'\|_{L^p}$, alors on a une estimation de $|u(x)|$. Sinon, $|u(x)| > 2|d/2|^{1/q}\|u'\|_{L^p}$ et donc

$$|u(y)| \geq |u(x)| - |d/2|^{1/q}\|u'\|_{L^p} \geq |u(x)| - |u(x)|/2 = |u(x)|/2$$

Mais alors, $\displaystyle\int_x^{x+d/2} |u(y)|^p \geq (d/2)\frac{|u(x)|^p}{2^p}$, et donc $|u(x)| \leq (2/d)^{1/p}\|u\|_p$.

On a donc prouvé que

$$|e_x(u)| = |u(x)| \leq \max\{2|d/2|^{1/q}\|u'\|_{L^p}, (2/d)^{1/p}\|u\|_p\} \leq K\|u\|_{W^{1,p}}$$

avec $K = \max\{2|d/2|^{1/q}, (2/d)^{1/p}\}$. $\square$

3.1.2 Approximation

Commençons par le cas où $I = \mathbb{R}$.

Théorème 3.7 *On suppose que $p \in [1, +\infty[$. Alors l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

Remarque 3.8 Comme souvent avec les résultats d'approximation, le résultat est faux pour $p = +\infty$. En fait on peut montrer aussi que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est aussi dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Preuve *: La preuve se fait par convolution. Soit ϕ un noyau de convolution “standard” : ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans $[-1,1]$, avec $\phi \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$. On pose $\phi_\epsilon(x) = \phi(x/\epsilon)/\epsilon$. Alors ϕ_ϵ est à support dans $[-\epsilon, \epsilon]$ et $\int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon = 1$.

Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ et notons $u_\epsilon = \phi_\epsilon \star u$. Rappelons que u_ϵ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et converge vers u dans $L^p(\mathbb{R})$.

Nous montrons maintenant que $u'_\epsilon = \phi_\epsilon \star u'$, ce qui prouve que u'_ϵ appartient à $L^p(\mathbb{R})$ (puisque c'est le cas de u') et converge aussi vers u' dans $L^p(\mathbb{R})$. En effet, rappelons que $u'_\epsilon = \phi'_\epsilon \star u$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \to \phi_\epsilon(x-t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ et, par définition de la dérivée au sens des distributions, on a

$$(\phi'_\epsilon \star u)(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi'_\epsilon(x-t)u(t)dt = -\int_{\mathbb{R}} u(t)\frac{d}{dt}(\phi(x-t))dt = \int_{\mathbb{R}} u'(t)\phi_\epsilon(x-t)dt = (\phi_\epsilon \star u')(x)\ .$$

Comme u_ϵ et u'_ϵ convergent respectivement vers u et u' dans $L^p(\mathbb{R})$ lorsque $\epsilon \to 0$, on a que u_ϵ tend vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. $\square$

On note $\mathcal{C}^\infty([a,b])$ la restriction à $[a,b]$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Théorème 3.9 *On suppose que $I =]a,b[$ est un intervalle ouvert borné. Alors l'espace $\mathcal{C}^\infty([a,b])$ est dense dans $W^{1,p}(]a,b[)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$. Plus précisément, pour tout $u \in W^{1,p}(I)$, il existe une suite de fonction (u_n) qui converge uniformément vers u dans $[a,b]$ et telle que (u'_n) converge vers u' dans $L^p(I)$.*

Remarque 3.10

1. Comme précédemment, le résultat est faux pour $p = +\infty$.
2. Il n'est pas vrai non plus que $\mathcal{C}^\infty_c(]a,b[)$ est dense dans $W^{1,p}([a,b])$. Nous verrons plus loin que l'adhérence de $\mathcal{C}^\infty_c(]a,b[)$ pour la norme de $W^{1,p}([a,b])$ est l'ensemble des fonctions de $W^{1,p}([a,b])$ qui s'annulent en a et en b.

Preuve * : La preuve se fait en utilisant le théorème précédent et un argument de prolongement des fonctions de $W^{1,p}(]a,b[)$ à $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Fixons $u \in W^{1,p}(]a,b[)$ et $\epsilon > 0$. On affirme qu'il existe $w \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ tel que $u = w$ dans $[a,b]$. En effet, si on pose

$$w(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dans } [a,b] \\ (x-a+1)u(a) & \text{dans } [a-1,a] \\ (b+1-x)u(b) & \text{dans } [b,b+1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

alors w est dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$ avec $w'(x) = u'(x)$ p.p. dans $[a,b]$, $w'(x) = u(a)$ dans $]a-1,a[$ et $w'(x) = -u(b)$ dans $[b,b+1]$.

Comme $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$, il existe $w_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R})$ tel que $\|w - w_\epsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq \epsilon$. Rappelons que w_ϵ est obtenu par simple convolution de la fonction continue à support compact w, et donc w_ϵ converge uniformément vers w dans $\mathbb{R}$ tandis que (w'_ϵ) tend vers w dans $L^p(\mathbb{R})$. Définissons u_ϵ comme la restriction de w_ϵ à $[a,b]$. Alors $u_\epsilon \in W^{1,p}([a,b])$, u_ϵ converge uniformément vers u dans $[a,b]$ et

$$\|u - u_\epsilon\|_{W^{1,p}([a,b])} = \|u - u_\epsilon\|_{L^p([a,b])} + \|u' - u'_\epsilon\|_{L^p([a,b])} \leq \|w - w_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|w' - w'_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \epsilon$$

puisque $w = u$ et $w_\epsilon = u_\epsilon$ dans $[a,b]$. $\square$

Une application des techniques précédentes est la formule d'intégration par parties :

Proposition 3.11 *On suppose que $I =]a,b[$ avec $a < b$ réels et $p \geq 1$. Si $u, v \in W^{1,p}(I)$, alors $uv \in W^{1,p}(I)$ et $(uv)' = u'v + uv'$. De plus, on a*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Preuve : Comme u et v sont dans $W^{1,p}(I)$, u et v sont bornés et donc $uv' + u'v \in L^p(I)$. Le reste de la preuve se fait en supposant que $p = 1$ sans perte de généralité.

Régularisons u et v par des fonctions (u_n) et (v_n) de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui convergent dans $W^{1,1}(I)$ et uniformément sur $[a,b]$ vers u et v respectivement. Comme, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^1(I)$, on a

$$\int_a^b u_n v_n \phi' = -\int_a^b (u_n v_n)'\phi = -\int_a^b (u_n' v_n + u_n v_n')\phi$$

on obtient, en passant à la limite,

$$\int_a^b uv\phi' = -\int_a^b (u'v + uv')\phi$$

ce qui prouve que $(u'v + uv')$ est la dérivée au sens des distributions de uv. Or uv est borné et $(u'v + uv')$ est dans L^1, ce qui prouve que $uv \in W^{1,1}(I)$ (dans le cas où $p \in [1, +\infty]$, le même argument montre que $uv \in W^{1,p}(I)$).

Montrons finalement la formule d'intégration par parties : elle est vraie pour u_n et v_n :

$$\int_a^b u_n(x)v_n'(x)dx = [u_n(x)v_n(x)]_a^b - \int_a^b u_n'(x)v_n(x)dx$$

Comme (u_n) (resp. (v_n)) converge uniformément vers u (resp. v) et u_n' (resp. (v_n')) converge vers u' (resp. v') dans L^1, on peut passer à la limite dans l'égalité ci-dessus pour obtenir le résultat. □

3.1.3 L'espace $W_0^{1,p}(I)$

On suppose ici que $I =]a,b[$. On appelle $W_0^{1,p}(I)$ le sous-ensemble de $W^{1,p}(]a,b[)$ constitué des éléments $u \in W^{1,p}(]a,b[)$ tels que $u(a) = u(b) = 0$.

Proposition 3.12 *$W_0^{1,p}(]a,b[)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $W^{1,p}(]a,b[)$. En particulier, muni de la distance de $W^{1,p}(]a,b[)$, c'est un espace de Banach.*

L'espace le plus utilisé est lorsque $p = 2$, et on note plutôt $W_0^{1,2}(I) = H_0^1(I)$; c'est un espace de Hilbert.

Preuve * : Lorsque $p > 1$, le résultat est évident, puisque l'application $e_a : W^{1,p}(]a,b[) \to \mathbb{R}$ et $e_b : W^{1,p}(]a,b[) \to \mathbb{R}$, qui à u associent $u(a)$ et $u(b)$, sont linéaires continues. Donc $W_0^{1,p}(]a,b[)$ est fermé, comme intersection du noyau de e_a et de celui de e_b (qui sont fermés par continuité).

Lorsque $p = 1$, il suffit de prendre la définition : soit (u_n) une suite de $W_0^{1,1}(I)$ qui tend dans $W^{1,1}$ vers une fonction $u \in W^{1,1}(I)$. Alors on sait que, pour tout $x \in I$, $u_n(x) = \displaystyle\int_a^x u_n'(t)dt$. Comme, en particulier, (u_n) tend vers u dans $L^1(I)$, il existe une sous-suite (u_{n_k}) qui tend vers u presque partout. Si $x \in I$ est un tel élément, on a $u_{n_k}(x) \to u(x)$ tandis que $(\int_a^x u_{n_k}'(t)dt)$ tend vers $\int_a^x u'(t)dt$ par convergence L^1 de (u_n') vers u'. Donc $u(x) = \displaystyle\int_a^x u'(t)dt$ pour presque tout $x \in I$ et, par continuité de u, pour tout $x \in I$. En particulier, $u(a) = 0$. On montre de même que $u(b) = 0$, ce qui conclut la preuve de la fermeture de $W_0^{1,1}(I)$. □

Théorème 3.13 *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ est dense dans $W_0^{1,p}(]a,b[)$.*

Idée de la preuve : Quitte à faire une translation, on peut supposer que l'intervalle $[a,b]$ est symétrique par rapport à 0, i.e. $b > 0$ et $a = -b$. Soit $u \in W_0^{1,p}([-b,b])$ et $\delta > 0$ fixé. Soit $\epsilon \in]0,1[$ et $u_\epsilon(x) = u(x/(1-\epsilon))$ si $x \in]-b(1-\epsilon), b(1-\epsilon)[$ et $u_\epsilon(x) = 0$ si $x \in [-b,b] \backslash]-b(1-\epsilon), b(1-\epsilon)[$. Alors il est facile de voir que $u_\epsilon \in W_0^{1,p}([-b,b])$ avec $u_\epsilon'(x) = u'(x/(1-\epsilon))/(1-\epsilon)$ si $x \in]-b(1-\epsilon), b(1-\epsilon)[$

et $u'_\epsilon(x) = 0$ si $x \in [-b, b] \setminus]-b(1-\epsilon), b(1-\epsilon)[$. De plus, on peut montrer que (u_ϵ) tend vers u dans $W^{1,p}([-b, b])$ lorsque $\epsilon \to 0$: la convergence de (u_ϵ) vers u dans L^p est directe (en fait uniforme) ; la partie plus délicate est la convergence de (u'_ϵ) vers u', qui se montre comme pour la continuité des translations dans $L^1(\mathbb{R})$ (en utilisant la densité des fonctions continues dans L^p).

En particulier, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|u - u_\epsilon\|_{W^{1,p}} \leq \delta/2$. Maintenant u_ϵ est à support contenu dans $[-b(1-\epsilon), b(1-\epsilon)]$ et peut être approché par régularisation par convolution par une fonction $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est continu dans l'intervalle un peu plus grand $[-b(1-\epsilon/2), b(1-\epsilon/2)]$. En particulier, on peut prendre $v \in \mathcal{C}_c^\infty(]-b, b[)$ et $\|v - u_\epsilon\|_{W^{1,p}} \leq \delta/2$. Alors $\|u - v\|_{W^{1,p}} \leq \delta$. □

Théorème 3.14 (Inégalité de Poincaré) *Soit $p \geq 1$. Il existe une constante C, qui ne dépend que de $b - a$ et de p, telle que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(]a,b[)} \leq C\|u'\|_{L^p(]a,b[)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(]a, b[)$$

Remarque 3.15 La conclusion de ce résultat est fausse pour $W^{1,p}(]a, b[)$ (penser aux fonctions constantes!). De façon à peine plus subtile, elle est fausse pour $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (alors que les fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ tendent vers 0 à l'infini : voir exercice) : cela se voit par un argument d'échelle. En effet, soit u n'importe quel élément de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ et posons $u_\epsilon(x) = u(\epsilon x)$. Alors $u'_\epsilon(x) = \epsilon u'(\epsilon x)$, et donc $\|u'_\epsilon\| = \epsilon^{1-1/p}\|u'\|_p$, tandis que $\|u_\epsilon\|_p = \epsilon^{-1/p}\|u\|_p$. Si $u \not\equiv 0$, on ne peut espérer avoir une constante $C > 0$ telle que $\epsilon^{-1/p}\|u\|_p = \|u_\epsilon\|_p \leq C\|u'_\epsilon\|_p = \epsilon^{1-1/p}\|u'\|_p$ pour tout $\epsilon > 0$.

Preuve : Vu la définition de la norme sur $W^{1,p}(]a, b[)$, il suffit de montrer l'existence d'une constante C telle que, pour tout $u \in W_0^{1,p}(]a, b[)$, on a $\|u\|_p \leq C\|u'\|_p$. Or, comme $u(a) = 0$, on a pour tout $x \in [a, b]$,

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t)dt \right| \leq \|u'\|_1 \leq (b-a)^{1-1/p}\|u'\|_p$$

(où la dernière inégalité est obtenue par inégalité de Hölder). Donc

$$\|u\|_p \leq (b-a)^{1/p}\|u\|_\infty \leq (b-a)\|u'\|_p \ .$$

□

3.2 Application aux équations elliptiques en dimension 1

Soit $I :=]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. On s'intéresse ici aux équations de la forme

$$(P) \qquad -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ dans }]a, b[, \qquad u(a) = u(b) = 0 \ ,$$

où c et f sont des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, **avec** $c \geq 0$. Ce problème est le prototype d'équation elliptique (mais une caricature d'EDP, puisqu'on peut trouver les solutions en résolvant une EDO ! Attention cependant, ce n'est pas une EDO habituelle : en effet, dans la théorie classique des EDO, on fixe une condition initiale du type $(u(a), u'(a))$, l'EDO étant d'ordre 2. Ici on fixed une condition initiale $u(a)$ et une condition finale $u(b)$).

La méthode de résolution est la suivante :

1. on écrit le problème sous une forme faible (dans laquelle la dérivée seconde n'apparait pas).

2. on utilise le théorème de Lax-Milgram pour montrer que le problème sous sa formulation faible possède une solution,

3. on montre que cette solution est régulière et solution classique du problème initial.

3.2.1 Existence et unicité d'une solution faible

Proposition 3.16 *Si u une solution de classe $\mathcal{C}^2$ du problème (P), alors*

$$\int_I \big(u'(x)\phi'(x) + c(x)u(x)\phi(x)\big)\,dx = \int_I f(x)\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I) \tag{1}$$

Preuve* : On multiplie l'équation par $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ et on intègre :

$$\int_I (-u''(x) + c(x)u(x))\phi(x)dx = \int_I f(x)\phi(x)dx\ ,$$

ce qui donne, par intégration par parties dans le premier terme :

$$\big[-u'(x)\phi(x)\big]_a^b + \int_I (u'(x)\phi'(x) + c(x)u(x)\phi(x))dx = \int_I f(x)\phi(x)dx\ ,$$

Or $\phi(a) = \phi(b) = 0$ puisque ϕ est à support compact. D'où le résultat. $\square$

Afin de pouvoir utiliser les résultats d'analyse fonctionnelle, on va chercher la solution u dans un espace a priori plus large que $\mathcal{C}^2$. Comme l'expression (1) ne comporte que des dérivées d'ordre 1 et qu'on cherche une fonction qui s'annule en a et b, il est naturel de travailler avec $H_0^1(I)$. Notons que l'expression (1) a un sens si u et ϕ sont dans $H_0^1(I)$: dans ce cas, u' et ϕ' étant dans L^2, $u'\phi'$ est dans L^1 ; de plus u et ϕ sont continues, ce qui garantit que $cu\phi \in L^1$ et $f\phi \in L^1$, l'intervalle $I =]a,b[$ étant borné. On parle alors de solution faible de (P) :

Définition 3.17 (Formulation faible) *On dit que $u \in H_0^1(I)$ est une solution faible de (P) si*

$$\int_I \big(u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x)\big)\,dx = \int_I f(x)v(x)dx \qquad \forall v \in H_0^1(I)$$

Au vu de la formulation faible, on pose

$$a(u,v) = \int_I \big(u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x)\big)\,dx \qquad \forall u,v \in H_0^1(I)\ .$$

Lemme 3.18 *a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(I) \times H_0^1(I)$.*

Preuve* : Comme $u', v' \in L^2$, le produit $u'v'$ est dans L^1. D'autre part, comme c est continue, c est bornée. Comme u et v sont dans L^2 (en fait dans L^∞), le produit cuv est dans L^1 (en fait dans L^∞). Donc l'intégrale définissant $a(u,v)$ est bien définie. Comme a est clairement bilinéaire, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \le C\|u\|_{H^1(I)}\|v\|_{H^1(I)} \qquad \forall u,v \in H_0^1(I)\ .$$

D'après Cauchy-Schwarz, on a

$$\left|\int_I u'v'\right| \le \|u'\|_2\|v'\|_2 \le \|u\|_{H^1(I)}\|v\|_{H^1(I)}\ .$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\left|\int_I c(x)u(x)v(x)\ dx\right| &\le \int_I |c(x)u(x)v(x)|\ dx \ \le\ \|c\|_\infty \int_I |u(x)v(x)|\ dx \\ &\le \|c\|_\infty\|u\|_2\|v\|_2 \le \|u\|_{H^1(I)}\|v\|_{H^1(I)}\end{aligned}$$

Donc

$$|a(u,v)| \le (1 + \|c\|_\infty)\|u\|_{H^1(I)}\|v\|_{H^1(I)}\ .$$

$\square$

Lemme 3.19 *Rappelons que $c \geq 0$. Alors la forme bilinéaire a est coercive.*

Preuve* : On utilise ici l'inégalité de Poincaré, qui affirme l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq C\|u'\|_2 \qquad \forall u \in H_0^1(I) .$$

Pour tout $u \in H_0^1(I)$, on a, puisque $c \geq 0$,

$$a(u,u) = \int_I ((u'(x))^2 + c(x)(u(x))^2)dx \geq \|u'\|_2^2 \geq (1/C)\|u\|_{H^1(I)}$$

□

Proposition 3.20 *Il existe un unique solution faible $u \in H_0^1(I)$ de (P) :*

$$(*) \qquad \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx = \int_I f(x)u(x)dx \qquad \forall v \in H_0^1(I) .$$

Preuve* : Posons $F(v) = \int_I f(x)v(x)dx$ pour $v \in H_0^1(I)$. Notons que F est une forme linéaire continue puisque F est bien défini (car f et v sont borné), F est clairement linéaire et

$$\|F(v)| \leq \int_I |f(x)|\ |v(x)|\ dx \leq \|f\|_\infty (b-a)^{1/2}\|v\|_2 \leq \|f\|_\infty (b-a)^{1/2}\|v\|_{H^1(I)}$$

pour tout $v \in H_0^1(I)$.

La relation $(*)$ se réécrit :

$$(**) \qquad a(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H_0^1(I) .$$

Comme F est une forme linéaire continue sur $H_0^1(I)$ et que a est ue forme bilinéiare continue coercive sur $H_0^1(I) \times H_0^1(I)$, où $H_0^1(I)$ est un espace de Hilbert, le théorème de Lax-Milgram affirme qu'il existe un unique élément $x \in H_0^1(I)$ pour lequel $(**)$ est vrai. □

3.2.2 Régularité de la solution

Dans cette partie, nous complétons le programme, en montrant que la solution faible construite auparavant est en fait une solution au sens classique. En étape préliminaire, on a

Lemme 3.21 *Si $u \in H_0^1(I)$ est solution faible du problème, alors $u' \in H^1(I)$ et $(u')'(x) = c(x)u(x) - f(x)$ presque partout.*

Preuve* : On utilise la définition de l'espace de Sobolev $H^1(I)$ et le fait que u est solution faible pour déduire que

$$\int_I u'(x)\phi'(x)dx = a(u,\phi) - \int_I c(x)u(x)\phi(x)dx = \int_I (f(x) - c(x)u(x))\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in C_c^1(I) .$$

Or $f - cu$ est continue (on rappelle que les éléments d'un espace de Sobolev en dimension 1 sont continus), donc dans $L^2(I)$. Comme $u' \in L^2$ par hypothèse, on en déduit que u' est dans $H^1(I)$ avec $u' = -(f - cu) = cu - f$ p.p.. □

Nous pouvons maintenant compléter la démarche :

Théorème 3.22 *Le problème (P) possède une unique solution de classe $\mathcal{C}^2$.*

Preuve* : Si u est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (P), alors u est solution faible et donc il y a au plus une telle solution.

D'autre part, si $u \in H_0^1(I)$ est solution faible du problème, alors nous avons vu ci-dessus que $u' \in H^1(I)$ et $(u')'(x) = c(x)u(x) - f(x)$ presque partout. Or la fonction $x \to c(x)u(x) - f(x)$ est continue, ce qui montre que $(u')'$ possède un représentant continu. Donc u est de classe $\mathcal{C}^2$ et satisfait $-u'' + cu = f$ dans I. Finalement, $u(a) = u(b) = 0$ puisque u appartient à $H_0^1(I)$. □

3.3 Application au problème avec conditions au bord de type Neumann

La démarche décrite précédemment se généralise à de nombreux autres problèmes. On se contente de décrire celui avec les conditions au bord de type Neumann. Soit $I :=]a, b[$. On s'intéresse maintenant au problème

$$(N) \qquad -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ dans }]a, b[, \qquad u'(a) = u'(b) = 0\ ,$$

où c et f sont des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, **avec** $c > 0$ **dans** $[a, b]$. La différence avec le problème précédent se lit dans les conditions aux limites $u'(a) = u'(b) = 0$ (qui remplace les conditions de type Dirichlet $u(a) = u(b) = 0$).

Pour trouver la notion de solution faible, on suppose que la solution u est de classe C^2 et on multiplie par $\phi \in C^\infty$ (pas nécessairement nulle au bord de I) : on a alors

$$\int_I \big(u'(x)\phi'(x) + c(x)u(x)\phi(x)\big)\, dx = \int_I f(x)\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty(I)$$

car le terme $\big[-u'(x)\phi(x)\big]_a^b$ dans l'intégration par parties est nul grâce aux conditions au bord $u'(a) = u'(b) = 0$.

Cela conduit à la formulation faible :

Définition 3.23 *On dit que $u \in H^1(I)$ est une solution faible de (N) si*

$$\int_I \big(u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x)\big)\, dx = \int_I f(x)v(x)dx \qquad \forall v \in H^1(I)$$

Comme précédemment, on introduit la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_I \big(u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x)\big)\, dx \qquad \forall u, v \in H^1(I)\ .$$

Lemme 3.24 *Rappelons que $c(x) > 0$ sur $[a, b]$. Alors la forme bilinéaire a est continue et coercive sur $H^1(I)$.*

Preuve * : La continuité se montre comme précédemment. La coercivité vient de l'hypothèse $c > 0$ qui, par continuité de c devient $c(x) \geq c_0$ pour tout $x \in I$, où $c_0 > 0$. D'où, pour tout $u \in H^1(I)$,

$$a(u, u) = \int_I \big((u'(x))^2 + c(x)(u(x))^2\big)\, dx \geq \int_I \big((u'(x))^2 + c_0(u(x))^2\big)\, dx \geq c_0\|u\|_{H^1}^2\ .$$

□

Comme l'application $v \to \int_I fv$ est continue sur $H^1(I)$, le théorème de Lax-Milgram affirme que le problème (N) possède une unique solution faible : il existe un unique $u \in H^1(I)$ tel que

$$a(u, v) = \int_I fv \qquad \forall v \in H^1(I)\ .$$

Reste à montrer que u est une solution classique.

Lemme 3.25 *Si u est la solution faible de (N), alors u' appartient à $H_0^1(I)$.*

Preuve * : Le fait que $u' \in H^1(I)$ se montre comme précédemment. Nous montrons maintenant que $u'(a) = u'(b) = 0$. L'idée est d'utiliser une famille de fonctions test qui tend vers 0, mais dont la dérivée devient grande au point a ou au point b. Pour simplifier les calculs, on peut supposer (quitte à effectuer une translation et une dilatation) que $a = 0$ et $b = 1$. Montrons que $u'(b) = 0$. Pour cela, on considère la suite de fonctions test $\phi_n(x) = x^n \in C^1(I)$. Alors

$$\int_0^1 u'(x)nx^{n-1} + u(x)x^n \; dx = \int_0^1 f(x)x^n dx$$

où, comme $x^n \to 0$ dans $]0,1[$ et $|x^n| \leq 1$, on a, par convergence dominée,

$$\lim_n \int_0^1 u(x)x^n \; dx = \lim_n \int_0^1 f(x)x^n dx = 0$$

tandis que, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 u'(x)nx^{n-1}dx = \left[u'(x)x^n\right]_0^1 - \int_0^1 u''(x)x^n \; dx = u'(1) - \int_0^1 u''(x)x^n \; dx \; .$$

Comme ci-dessus, on a $\int_0^1 u''(x)x^n \; dx \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc $u'(1) = 0$. On montre de même que $u'(0) = 1$. □

En conclusion, on a prouvé :

Théorème 3.26 *Le problème (P) possède une unique solution classique.*

3.4 Espaces de Sobolev en dimension supérieure - formulation faible

Les espaces de Sobolev en dimension supérieure se définissent de façon similaire à ce que nous avons fait en dimension un. Cependant, nombre de propriétés ne se conservent pas : notamment il n'est plus vrai que les fonctions de $W^{1,p}$ soient continues, ni même bornées, pour toutes les valeurs de p.

3.4.1 Définitions

Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Pour définir $W^{1,p}(\Omega)$, on part de la formule d'intégration par parties : si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $v \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, alors, pour tout $i = 1, \ldots, N$, on a

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v(x)dx$$

C'est une conséquence directe de la formule d'intégration par parties dans $\mathbb{R}$ et du théorème de Fubini.

Définition 3.27 *Soit $p \in [1, +\infty]$. On dit que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega)$ et s'il existe $g_1, \ldots, g_N \in L^p(\Omega)$ tels que*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega g_i(x)v(x)dx \qquad \forall v \in \mathcal{C}_c^1(\Omega) \; .$$

Les fonctions g_i sont définies de façon unique et s'appellent les dérivées aux sens des distributions de u. On utilise par abus de notation l'écriture standard $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$.

Notons que, si Ω est borné, les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\bar{\Omega}$ appartiennent à tous les espaces $W^{1,p}(\Omega)$. Si Ω est n'est pas borné, c'est le cas de la restriction à Ω de toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact dans $\mathbb{R}^N$. L'unicité des dérivées faibles se montre comme en dimension 1.

Contrairement au cas de la dimension 1 d'espace, les fonctions de l'espace de Sobolev $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ne sont pas continues en général (sauf si $p > N$, où N est la dimension de l'espace ambiant : c'est l'inégalité de Morrey (cf. Brézis)).

Par exemple, supposons que Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^N$ et $u(x) = \|x\|^{-\alpha}$ (avec $\alpha > 0$). Notons que $u \in L^p(\Omega)$ dès que $N > \alpha p$ et, comme $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\alpha\|x\|^{-\alpha-2}x_i$ (au sens usuel) pour $x \neq 0$, on a $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ lorsque $N > (\alpha+1)p$. On montre aisément que $-\alpha\|x\|^{-\alpha-2}x_1, \ldots, -\alpha\|x\|^{-\alpha-2}x_N$ sont les dérivées au sens distribution de u (il suffit d'approcher u par la suite de fonctions $u_n(x) := (\|x\|^2 + 1/n)^{-\alpha/2}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de passer à la limite dans la formule d'intégration par parties pour u_n). Si $p = 1$ et $N \geq 2$ par exemple, on peut prendre $\alpha = N - 3/2$ et la fonction (discontinue, non bornée) u appartient à $W^{1,1}(\Omega)$.

Proposition 3.28 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le muni de la norme (pour $p \neq 2$)*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

Lorsque $p = 2$, on pose $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ et on choisit plutôt

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

La preuve est identique à celle de la dimension 1.

Le fait que les fonctions de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ n'ont pas de représentant continu implique qu'on ne peut pas définir de valeur ponctuelle à $u(x)$ pour tout x. En particulier, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ (les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ qui, au moins heuristiquement, sont nulles sur le bord de Ω) doit être défini de façon indirecte. Nous avons vu en dimension 1 que $W_0^{1,p}(]a,b[)$ est l'adhérence des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ pour la norme $W^{1,p}(]a,b[)$: nous utilisons cette idée pour définir $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Définition 3.29 *$W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence, pour la norme $W^{1,p}$, de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (ou, de façon équivalente, de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$).*

Pour $p = 2$, on pose $H_0^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.

On interprète $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ qui sont nulles sur le bord de Ω. Par exemple, si Ω est un ouvert borné et si u est une fonction constante, alors u appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$, si et seulement si, u est identiquement nulle (ce qui est rassurant, à défaut d'être convaincant). En effet, si (u_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ qui converge vers u pour la norme $W^{1,p}$, par intégration par parties classique, et en prenant $v_i(x) = x_i$,

$$\int_\Omega u_n(x)dx = \int_\Omega u_n(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)v_i(x)dx$$

Or $u_n \to u$ dans L^p (et donc dans L^1 puisque Ω est borné) et, de même, $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ tend vers $0 = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans L^p et donc dans L^1. Comme v_i est bornée sur Ω (toujours parce que Ω est borné) , on a finalement $\int_\Omega u(x)dx = 0$. Comme u est constante, cela implique que u est nulle.

Remarque 3.30 Comme, par définition, $W_0^{1,p}(\Omega)$ est fermé dans $W^{1,p}(\Omega)$ et que $W^{1,p}(\Omega)$ est complet, $W_0^{1,p}(\Omega)$ est lui-même un espace de Banach, tandis que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

3.4.2 Exemples de formulation faible

Une des applications les plus simples est la résolution d'équations de la forme

$$(E) \qquad -\Delta u + u = f \qquad \text{dans } \Omega,\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ (le laplacien) et $f \in L^2(\Omega)$.

Afin de tenir compte du fait qu'on cherche une fonction u qui soit nulle au bord de Ω, il est naturel de travailler dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. Comme en dimension 1, on cherche une formulation faible : on multiplie l'équation par une fonction $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et on intègre pour obtenir

$$\int_\Omega v(x)\left(-\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)\right) + v(x)u(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx\ .$$

Par intégration par parties, on a

$$\int_\Omega v(x)\left(-\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)\right)dx = -\sum_{i=1}^N \int_\Omega v(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx$$

D'où

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx + \int_\Omega v(x)u(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \qquad \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\ .$$

Comme cette relation a encore un sens si $v \in H_0^1(\Omega)$, on introduit la notion de la formulation faible :

Définition 3.31 *On dit que u est une solution faible de l'équation (E) si $u \in H_0^1(\Omega)$ et si*

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx + \int_\Omega v(x)u(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\ .$$

Le résultat suivant est alors immédiat.

Théorème 3.32 *Il existe une unique solution faible à l'équation (E).*

Preuve* : La formulation faible se réécrit plus simplement comme

$$(Ef) \qquad \langle u, v\rangle_{H^1} = \int_\Omega f(x)v(x)dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\ .$$

Comme l'application $v \to \int_\Omega fv$ est linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ (par une application directe de Cauchy-Schwarz), le théorème de représentation de Riesz affirme qu'il existe un unique élément $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant (Ef). Il existe donc une unique solution faible de l'équation. □