Université Paris-Dauphine
DUMI2E
Année 2012-2013

Analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles (Troisième partie)

P. Cardaliaguet

Les démonstrations comportant le signe (*) sont à connaître.

Table des matières

4 Distributions tempérées et transformée de Fourier

Note : Dans toute la suite, nous aurons besoin de faire un tout petit peu de calcul intégral dans $\mathbb{R}^N$ (pour $N \geq 2$). Pour cela, on gardera en tête que, si $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction radiale, i.e., s'il existe une fonction $\tilde{u} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $u(x) = \tilde{u}(\|x\|)$, alors $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, si et seulement si, la fonction $r \to r^{N-1}\tilde{u}(r)$ appartient à $L^1([0, +\infty[)$. Dans ce cas, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)dx = C_N \int_0^{+\infty} r^{N-1}\tilde{u}(r)dr$$

où C_N est le volume (pour la mesure de Lebesgue) de la boule unité de $\mathbb{R}^N$.

Dans le cas particulier où $N = 2$, si $u\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on pose $\tilde{u}(r, \theta) = u(r\cos(\theta), r(\sin(\theta))$ pour $(r, \theta) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi[$, Alors on a par changement de variables que $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$, si et seulement si l'application $(r, \theta) \to r\tilde{u}(r, \theta)$ est dans $L^1([0, +\infty[\times[0, 2\pi[)$. Dans ce cas

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x)dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r\tilde{u}(r, \theta)\, drd\theta$$

4.1 Classe de Schwartz

On s'intéresse dans cette partie aux fonctions très régulières sur $\mathbb{R}^N$ et qui tend vers 0 à l'infini plus rapidement que n'importe quelle puissance de $1/\|x\|$. Le prototype de ces fonctions dans $\mathbb{R}$ (i.e., en dimension $N = 1$) est la fonction $x \to e^{-\frac{x^2}{2}}$. Dans $\mathbb{R}^N$, c'est la fonction $x \to e^{-\|x\|^2/2}$.

Nous aurons besoin de la notation suivante : soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice et $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}(x)$$

On notera $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots \alpha_N$ l'ordre de dérivation. Nous parlerons aussi de polynômes de plusieurs variables, en définissant le monôme $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_N^{\alpha_N}$: un polynôme sur $\mathbb{R}^N$ sera juste une combinaison linéaire finie de tels monômes.

Définition 4.1 *On dit que ϕ appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$ et si, pour tout entiers naturel n et k,*

$$N_{n,k}(\phi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^N,\ \alpha\in\mathbb{N}^N,\ |\alpha|=k} \left((1 + \|x\|^2)^n |\partial^\alpha \phi(x)|\right) < +\infty$$

On dit qu'une suite de fonctions (ϕ_p) de la classe de Schwartz converge vers $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si

$$\lim_{p\to+\infty} N_{n,k}(\phi - \phi_p) = 0 \qquad \forall n, k \in \mathbb{N}\ .$$

Remarques :

1. Par exemple, les fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Notons que le seul polynôme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est le polynôme nul.

2. Nous utiliserons à de multiples reprises le fait que les $N_{k,n}$ sont positivement homogène et vérifient l'inégalité triangulaire :

$$N_{n,k}(\lambda\phi) = |\lambda| N_{n,k}(\phi) \text{ et } N_{n,k}(\phi + \psi) \leq N_{n,k}(\phi) + N_{n,k}(\psi) \qquad \forall \phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\ .$$

En particulier $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

3. Même si les $N_{n,k}$ sont en fait des normes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (car si $N_{n,k}(\phi) = 0$ alors ϕ est un polynôme de degré au plus k ; or le seul polynôme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est le polynôme nul, donc $\phi = 0$), la notion de convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ introduite plus haut ne se réduit pas à la convergence dans une seule de ces normes. Bien garder en tête que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *n'est pas* un espace vectoriel normé.

Proposition 4.2 *On a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$. Plus précisément, on a, pour tout $p \in [1, +\infty]$ et pour tout $n > N/(2p)$, il existe une constante $C \geq 0$ tell que*

$$\|\phi\|_p \leq C N_{n,0}(\phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) ,$$

Preuve (*) : En effet, soit $p \in [1, +\infty[$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pour $n > N/(2p)$, on a $N_{n,0}(\phi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (\|x\|^2 + 1)^n |\phi(x)| < +\infty$. En particulier,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)|^p dx \leq (N_{n,0}(\phi))^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\|x\|^2 + 1)^{np}} = (N_{n,0}(\phi))^p C_N \int_0^{+\infty} \frac{r^{N-1}}{(r^2 + 1)^{np}} dr < +\infty$$

puisque $N - 1 - 2np < -1$ (on utilise ici que $n > N/(2p)$). Pour $p = +\infty$, notons que, par définition de $N_{n,0}$, on a $|\phi(x)| \leq N_{n,0}(\phi)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Une des propriétés importantes de la classe de Schwartz est la stabilité par rapport à la dérivation et la multiplication par un polynôme :

Proposition 4.3 *1. Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. De plus, si (ϕ_p) tend vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors $\partial^\alpha \phi_p$ tend vers $\partial^\alpha \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.*

2. Si P est un polynôme sur $\mathbb{R}^N$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors l'application $x \to (P\phi)(x) := P(x)\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. De plus, si (ϕ_n) tend vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors $P\phi_n$ tend vers $P\phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve:

1. (*) Notons que, pour tout n, k,

$$N_{n,k}(\phi') := \sup_{x \in \mathbb{R}^N, \, |\alpha'| \leq k} \left((1 + \|x\|^2)^n |\partial^{\alpha'} (\partial^\alpha \phi)(x)| \right) \leq N_{n,k+|\alpha|}(\phi) < +\infty$$

De plus, si (ϕ_p) tend vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors, pour tout n, k,

$$N_{n,k}(\partial^\alpha \phi - \partial^\alpha \phi) \leq N_{n,k+|\alpha|}(\phi - \phi_p) \to 0 .$$

Donc $(\partial^\alpha \phi_p)$ tend vers $\partial^\alpha \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

2. Pour simplifier l'exposé, on ne fait la preuve qu'en dimension $N = 1$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, il suffit de montrer le résultat pour un monôme de la forme $P(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Par formule de Leibnitz, on a, pour tout k,

$$(P\phi)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} C_k^r \phi^{(r)} P^{(k-r)}$$

où $P^{(k-r)}(x) = \dfrac{\alpha!}{(\alpha - k + r)!} x^{\alpha - k + r}$ si $k - r \leq \alpha$, 0 sinon. Donc, pour tout n, k,

$$\begin{aligned} N_{n,k}(P\phi) &\leq \sum_{r=\max\{0,k-\alpha\}}^{k} C_k^r \frac{\alpha!}{(\alpha - k + r)!} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left((1 + x^2)^n |x|^{\alpha - k + r} \left| \phi^{(r)}(x) \right| \right) \\ &\leq \sum_{r=\max\{0,k-\alpha\}}^{k} C_k^r \frac{\alpha!}{(\alpha - k + r)!} N_{r, n+\alpha-k+r}(\phi) \; < \; +\infty \end{aligned}$$

De même, si (ϕ_p) dans vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors, quand $p \to +\infty$,

$$N_{n,k}(P\phi - P\phi_p) \leq \sum_{r=\max\{0,k-\alpha\}}^{k} C_k^r \frac{\alpha!}{(\alpha-k+r)!} N_{r,n+\alpha-k+r}(\phi - \phi_p) \to 0 \; .$$

Donc $(P\phi_p)$ tend vers $P\phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

□

Une autre propriété importante de la classe de Schwartz est la stabilité par transformée de Fourier : rappelons que, si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors la transformée de Fourier de ϕ est la fonction continue et bornée

$$\mathcal{F}(\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x,y\rangle}\phi(y)dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \; ,$$

tandis que la transformée de Fourier inverse de ϕ est donnée par

$$\overline{\mathcal{F}}(\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,y\rangle}\phi(y)dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \; .$$

Notons $\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\mathcal{F}(f)(-x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\mathcal{F}(f^\sharp)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, où $f^\sharp(x) = f(-x)$. Dans ce qui suit, on utilise les notations suivantes :$(-ix)^\alpha := (-i)^{|\alpha|}x^\alpha$ et $(ix)^\alpha := i^{|\alpha|}x^\alpha$.

Théorème 4.4 *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même, et a pour inverse $\overline{\mathcal{F}}$:*

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\phi) = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\phi = \phi \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \; .$$

De plus, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha\phi)(x) = (-ix)^\alpha\mathcal{F}(\phi)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{1}$$

tandis que

$$\mathcal{F}((ix)^\alpha\phi)(x) = \partial^\alpha\mathcal{F}(\phi)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Enfin, on peut remplacer $\mathcal{F}$ par $\overline{\mathcal{F}}$ dans les énoncés ci-dessus.

Preuve : A nouveau, pour simplifier les notations, on travaille en dimension $N = 1$. On rappelle que $\mathcal{F}$ est une bijection de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$. D'autre part, il est bien connu que, si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est tel que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f')(x) = (-ix)\mathcal{F}(f)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathcal{F}(f')$ est bornée, cela prouve que $(1 + |x|)\mathcal{F}(f)$ est bornée. Inversement, si $(1 + |x|)f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $\mathcal{F}(f)' = \mathcal{F}((ix)f)$.

Lorsque $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors on montre par récurrence que, comme ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que toutes ses dérivées sont dans $L^1(\mathbb{R})$, la fonction $(1 + |x|)^n\mathcal{F}(\phi)$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, comme $(1 + x^2)^n\phi$ est borné pour tout n, la fonction $\mathcal{F}(\phi)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On montre également par récurrence les relations (1) et (2). Quant à la preuve, un peu plus calculatoire, de la continuité de $\mathcal{F}$, elle vient de la définition de la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ combinée à (1) et de (2). □

Proposition 4.5 *Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)g = \int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}(g)$$

Preuve (*) : C'est une conséquence directe du théorème de Fubini : comme $(x,t) \to \left|f(t)e^{i\langle t,x\rangle}g(x)\right|$ est dans $L^1(\mathbb{R}^{2N})$ (car f et g sont dans $L^1(\mathbb{R}^N)$), on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)g = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(t)e^{i\langle t,x\rangle}dt\right)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(t)\left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle t,x\rangle}g(x)dx\right)dt = \int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}(g)\ .$$

□

Proposition 4.6 (Stabilité par convolution) *L'application qui, à tout couple $(\phi,\psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ associe $\phi\star\psi$ est bilinéaire et continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. De plus, si $\phi,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors*

$$\mathcal{F}(\phi\star\psi) = \mathcal{F}(\phi)\mathcal{F}(\psi),\ \mathcal{F}(\phi\psi) = (2\pi)^{-N}\mathcal{F}(\phi)\star\mathcal{F}(\psi)$$

Preuve : Montrons d'abord les deux dernières égalités : on a, pour tout $t\in\mathbb{R}^N$ et en utilisant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\phi\star\psi)(t) &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \phi(x-y)\psi(y)e^{i\langle t,x\rangle}\ dydx = \int_{\mathbb{R}^N}\psi(y)e^{i\langle t,y\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\phi(x-y)e^{i\langle t,x-y\rangle}dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\psi(y)e^{i\langle t,y\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\phi(z)e^{i\langle t,z\rangle}dz\right)dy = \int_{\mathbb{R}^N}\psi(y)e^{i\langle t,y\rangle}\mathcal{F}(\phi)(t)dy \\
&= \mathcal{F}(\phi)(t)\mathcal{F}(\psi)(t)\ .
\end{aligned}$$

(où on a effectué le changement de variable $z = x-y$ dans la troisième égalité).

Notons que, lorsque l'on fait exactement le même calcul avec $\overline{\mathcal{F}}$ à la place de $\mathcal{F}$, on obtient :

$$\overline{\mathcal{F}}(\phi\star\psi) = (2\pi)^N\overline{\mathcal{F}}(\phi)\overline{\mathcal{F}}(\psi)$$

Pour la seconde égalité, prenons l'image du terme de droite par $\overline{\mathcal{F}}$. On a, d'après la remarque précédente (utilisée pour $\mathcal{F}(\phi)$ et $\mathcal{F}(\psi)$:

$$\overline{\mathcal{F}}\left((2\pi)^{-N}\mathcal{F}(\phi)\star\mathcal{F}(\psi)\right) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\phi)\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\psi) = \phi\psi$$

D'où $(2\pi)^{-N}\mathcal{F}(\phi)\star\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\phi\psi)$.

Montrons finalement que $\phi\star\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Comme $\phi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a aussi $\mathcal{F}(\phi),\mathcal{F}(\psi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $\mathcal{F}(\phi)\mathcal{F}(\psi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (ceci se montre facilement en utilisant la formule de Leibnitz). Comme $\mathcal{F}(\phi\star\psi) = \mathcal{F}(\phi)\mathcal{F}(\psi)$, on a $\phi\star\psi = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\phi\star\psi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est stable pour $\overline{\mathcal{F}}$. La continuité se prouve de même. □

4.2 Distributions tempérées

Définition 4.7 *Une distribution tempérée est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{C}$. L'espace des distributions tempérées est noté (fort logiquement) $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.*

Remarques :

1. L'ensemble $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées forme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

2. On peut démontrer (mais nous ne le ferons pas) que, si T est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ (i.e., T est continue), si et seulement si, il existe deux entiers m et n et une constante $C>0$ tels que

$$|T(\phi)| \le C\sum_{k\le m} N_{n,k}(\phi) \qquad \forall\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\ .$$

   Dans ce cas, on dit que T est **d'ordre** m si m est le plus petit indice pour lequel l'inégalité ci-dessus a lieu.

3. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, **le support de** T est le plus petit fermé $K \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N \backslash K),\ T(\phi) = 0$$

Exemples

1. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, avec $p \in [1, +\infty]$, alors

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

définit une distribution tempérée d'ordre 0 (grâce à la proposition 4.2 et l'inégalité de Hölder). Son support est celui de f.

2. **La masse de Dirac :** L'application

$$T(\phi) = \phi(0) \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

définit aussi une distribution tempérée d'ordre 0. Notons qu'on peut l'identifier à la masse de Dirac δ_0 en 0 :

$$T(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) d\delta_0(x)$$

Par abus de langage, nous dirons que $T = \delta_0$ et verrons δ_0 comme une distribution tempérée particulière.

3. **Valeur principale :** On suppose que $N = 1$. Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la limite

$$T(\phi) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R} \backslash]-\epsilon, \epsilon[} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

existe. Cette limite définit une distribution tempérée d'ordre 1.

Preuve : La fonction $x \to \dfrac{\phi(x)}{x}$ est clairement intégrable sur $\mathbb{R} \backslash]-\epsilon, \epsilon[$. Notons que l'application $x \to \dfrac{\phi(x) - \phi(0)}{x}$ est continue en 0, avec pour limite $\phi'(0)$ lorsque $x \to 0$. Donc, pour $\epsilon \in]0, 1[$,

$$\int_{[-1,1] \backslash]-\epsilon, \epsilon[} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{[-1,1] \backslash]-\epsilon, \epsilon[} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \int_{[-1,1] \backslash]-\epsilon, \epsilon[} \frac{\phi(0)}{x} dx$$

où le premier terme à droite possède une limite lorsque $\epsilon \to 0^+$ tandis que le second est nul car $1/x$ est impaire. En particulier,

$$\left| \int_{[-1,1] \backslash]-\epsilon, \epsilon[} \frac{\phi(x)}{x} dx \right| \leq \|\phi'\|_\infty .$$

tandis que

$$\left| \int_{\mathbb{R} \backslash [-1,1]} \frac{\phi(x)}{x} dx \right| \leq \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Ceci montre que T est continue et d'ordre au plus 1. Pour montrer que T est d'ordre 1, supposons au contraire que T soit d'ordre 0. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$|T(\phi)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| (1 + x^2)^n \phi(x) \right| \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) .$$

Pour $p \in \mathbb{N}^* > 0$, on définit ϕ_p comme étant la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ donnée par $\phi_p(x) = \mathrm{th}(px)\psi(x)$ où ψ est une fonction $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, qui vaut 1 sur $[-1,1]$, 0 en dehors de $[-2,2]$, positive sur $\mathbb{R}$. Alors ϕ_p est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$ et on a, puisque $|\mathrm{th}(x)| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$,

$$|T(\phi_p)| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(1+x^2)^n \phi_p(x)\right| \leq C'$$

où C' est une constante indépendante de p. Alors, comme $\phi_p(x)/x$ est positif sur $\mathbb{R}^*$, on a, par Fatou,

$$C' \geq \liminf_{p\to+\infty} T(\phi_p) \geq \liminf_{p\to+\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{th}(px)}{x} dx \geq \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty ,$$

ce qui est impossible. $\square$

Proposition 4.8 *Soit P un polynôme de $\mathbb{R}^N$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Alors l'application PT définie par*

$$(PT)(\phi) = T(P\phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

est une distribution tempérée.

Preuve (*) : Nous avons vu ci-dessus que $P\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. De plus l'application $\phi \to P\phi$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même. Ceci prouve que PT est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{R}$. $\square$

Proposition 4.9 (Dérivée d'une distribution tempérée) *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice. La distribution tempérée $\partial^\alpha T$ est définie par*

$$\partial^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

Preuve (*) : La preuve est identique à la démonstration de la proposition précédente. $\square$

Exemple : Si $N = 1$ et $T = \delta_0$, alors

$$T'(\phi) = -\phi'(0) \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Définition 4.10 (Transformée de Fourier d'une distribution) *Pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, l'application $\mathcal{F}T$ définie par*

$$\mathcal{F}T(\phi) = T(\mathcal{F}(\phi)) \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

est une distribution tempérée. De plus, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$,

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (-ix)^\alpha \mathcal{F}T \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}((ix)^\alpha T) = (\mathcal{F}T)^{(\alpha)}$$

Preuve (*) : C'est une conséquence directe des propriétés des fonctions de la classe de Schwartz. $\square$

Exemples : On suppose ici que $N = 1$ pour fixer les idées.

1. La distribution $\mathcal{F}\delta_0$ est donnée par définition par

$$\mathcal{F}(\delta_0)(\phi) = \mathcal{F}(\phi)(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx$$

Donc on peut assimiler la distribution $\mathcal{F}(\delta_0)$ à la fonction constante égale à 1 : $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$.

2. Inversement, si $T = 1$, i.e., T est la distribution

$$T(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) ,$$

alors $\mathcal{F}(T) = 2\pi\delta_0$. En effet, comme $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$, on a $\delta_0 = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\delta_0) = \overline{\mathcal{F}}(T)$, où

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}(T)(\phi) = T(\overline{\mathcal{F}}(\phi)) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}}(\phi)(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R} \mathcal{F}(\phi)(-x) dx = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\phi)(x) dx = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(T)(\phi) \end{aligned}$$

On peut également définir la convolution d'une distribution pondérée avec une fonction de la classe de Schwartz : pour cela, notons que, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \to \psi(x - y)$ est également dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 4.11 *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on pose*

$$(T \star \psi)(x) = T(\psi(x - \cdot)) \qquad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Alors nous admettrons que $T \star \psi$ est aussi la distribution tempérée donnée par

$$(T \star \psi)(\phi) = T(\psi^\sharp \star \phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) ,$$

où $\psi^\sharp(x) = \psi(-x)$. De plus

$$\mathcal{F}(T \star \psi) = \mathcal{F}(\psi)\mathcal{F}(T) . \tag{3}$$

Exemple : Si on prend $T = \delta_0$, alors

$$(\delta_0 \star \psi)(x) = \delta_0(\psi(x - \cdot)) = \phi(x)$$

Donc $\delta_0 \star \psi = \psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve de l'égalité (3) **(*) :** On rappelle (cf. Proposition 4.6) que $\mathcal{F}(a \star b) = (2\pi)^N \mathcal{F}(ab)$ et $\mathcal{F}(a) = (2\pi)^N \overline{\mathcal{F}}(a)$ pour tout $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(T \star \psi)(\phi) &= (T \star \psi)(\mathcal{F}(\phi)) = T(\psi^\sharp \star \mathcal{F}(\phi)) = T(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\psi^\sharp) \star \mathcal{F}(\phi)) \\ &= T\left((2\pi)^N \mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}}(\psi^\sharp)\phi\right)\right) = \mathcal{F}(T)\left((2\pi)^N \overline{\mathcal{F}}(\psi^\sharp)\phi\right) = \mathcal{F}(T)\left(\mathcal{F}(\psi)\phi\right) \\ &= \left(\mathcal{F}(\psi)\mathcal{F}(T)\right)(\phi) , \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité $\mathcal{F}(T \star \psi) = \mathcal{F}(\psi)\mathcal{F}(T)$. □

4.3 Applications à l'équation de Laplace

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. On cherche à résoudre l'équation de Laplace

$$(L) \qquad -\Delta u = f \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N$$

avec $u(x) \to 0$ lorsque $\|x\| \to +\infty$.

Définition 4.12 *On appelle solution fondamentale de l'équation de Laplace une distribution tempérée $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ telle que*

$$-\Delta E = \delta_0$$

au sens des distributions.

Un des intérêts de la solution fondamentale est de permettre de résoudre (L) directement :

Proposition 4.13 *Si E est une (la) solution fondamentale de l'équation de Laplace et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors $u = E \star f$ vérifie $-\Delta u = f$.*

Preuve (*) : En effet, on a

$$-\Delta(E \star f) = (-\Delta E) \star f = \delta_0 \star f = f \ .$$

□

La relation $-\Delta E = \delta_0$ s'écrit en Fourier : $\mathcal{F}(-\Delta E) = \mathcal{F}(\delta_0) = 1$. Or

$$\mathcal{F}(\Delta E) = \sum_{k=1}^{N} (-ix_k)^2 \mathcal{F}(E) = -\|x\|^2 \mathcal{F}(E) \ ,$$

d'où $\|x\|^2 \mathcal{F}(E) = 1$. En particulier, si $\mathcal{F}(E) = 1/\|x\|^2$, on obtient une solution de notre problème. En dimension $N \geq 3$, la fonction $x \to 1/\|x\|^2$ est localement intégrable et tend vers 0 à l'infini. Donc elle définit une distribution T par la formule

$$T(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(x)}{\|x\|^2} dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \ .$$

Par inversion de Fourier, on a alors $E = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(E) = \overline{\mathcal{F}}(T)$. On peut vérifier (mais cela demande un peu de calcul) que $\overline{\mathcal{F}}(T) = c_N \|x\|^{2-N}$ où c_N est une constante qui dépend de la dimension.

Proposition 4.14 *En dimension $N = 2$, la distribution distribution tempérée définie par*

$$E(\phi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(\|x\|) \phi(x) dx$$

est une solution fondamentale de l'équation de Laplace.

Preuve : Posons $\tilde{\phi}(r, \theta) = \phi(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ pour $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$. Alors

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \theta^2}$$

Comme $x \to \ln(\|x\|)\Delta\phi(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$, on a, par passage en coordonnées polaires,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \ln(\|x\|)\Delta\phi(x) dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\|x\| > \epsilon} \ln(\|x\|)\Delta\phi(x) dx$$

où

$$\int_{\|x\| > \epsilon} \ln(\|x\|)\Delta\phi(x) dx = \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^{+\infty} r\ln(r) \left(\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \theta^2} \right)$$

Notons que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \theta^2} d\theta = 0$ pour tout $r > 0$ et que, pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$,

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^{+\infty} r\ln(r)\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial r^2} &= \left[r\ln(r)\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \right]_\epsilon^{+\infty} - \int_\epsilon^{+\infty} (1 + \ln(r))\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} dr \\
&= -\epsilon\ln(\epsilon)\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r}(\epsilon, \theta) + \tilde{\phi}(\epsilon, \theta) - \int_\epsilon^{+\infty} \ln(r)\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} dr
\end{aligned}$$

car ϕ et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. Donc

$$\int_{\|x\| > \epsilon} \ln(\|x\|)\Delta\phi(x) dx = \int_0^{2\pi} \left(-\epsilon\ln(\epsilon)\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r}(\epsilon, \theta) + \tilde{\phi}(\epsilon, \theta) \right) d\theta \to 2\pi\phi(0) = 2\pi\delta_0(\phi)$$

lorsque $\epsilon \to 0$. Donc on a bien $-\Delta E = \delta_0$. □