Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

Examen. Lundi 18 janvier 2010, de 14 à 16 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Vous êtes invités à lire le sujet en entier, et à utiliser librement les résultats des questions précédentes, même si vous n'y avez pas répondu.*

1. Questions de cours.

1. Citer le théorème de Riesz sur le dual d'un espace de Hilbert.
2. Citer le théorème de Lax-Milgram.
3. Donner l'énoncé du théorème de Fubini (pour des fonctions qui n'ont pas spécialement de contrainte de signe).
4. Montrer qu'une fonction $u \in L^p(]0,1[)$ est dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(]0,1[)$ si et seulement si elle admet une dérivée faible (aussi appelée au sens des distributions) dans $L^p(]0,1[)$.

2. Exercice.

Soit H un espace de Hilbert. On notera $\overline{B}(0,1)$ sa boule unité fermée. Soit $v \in H$ un vecteur **de norme 1**. On notera $F := \{v\}^\perp$ et $\overline{B}_F := F \cap \overline{B}(0,1)$.

1. Justifier que pour $x \in H$, il existe un unique point de $\overline{B}_F$, noté T_x, qui minimise $\|x-y\|$ au sein des points y de $\overline{B}_F$.
2. Montrer que pour tout $x \in \overline{B}_F$, $T_x = x$.
3. Montrer que pour tout $x \in F \setminus \overline{B}_F$ et tout $y \in \overline{B}_F$ on a
$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2.$$
Montrer pour tout $x \in F \setminus \overline{B}_F$,
$$T_x = \frac{x}{\|x\|}.$$
4. Montrer que pour tout $x \in H \setminus F$, on a $x - \langle x,v\rangle v \in F$ et que
$$T_x = T_{x-\langle x,v\rangle v}.$$

3. Exercice.

Dans cette exercice, on s'intéresse au problème aux limites suivant : pour $f \in C^0([0,1];\mathbb{R})$ on étudie le système :

$$\begin{cases} -u'' + xu' + u = f \text{ dans } [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que si $u \in C^2([0,1];\mathbb{R})$ est solution de ce système, alors $\forall \varphi \in H_0^1(]0,1[)$, on a :

$$\int_0^1 u'\varphi' + (xu' + u - f)\varphi = 0. \tag{2}$$

   Justifier que l'intégrale précédente est bien définie quels que soient u et φ dans $H_0^1(]0,1[)$. On appellera solution faible de l'équation, toute fonction $u \in H_0^1(]0,1[)$ telle que (2) soit satisfait pour tout $\varphi \in H_0^1(]0,1[)$.

2. Soit $a : H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ donné par

$$\forall u, v \in H_0^1(]0,1[),\ a(u,v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x) + xu'(x)v(x) + u(x)v(x))\,dx.$$

   (a) Montrer que a est bilinéaire et continue.

   (b) Montrer que pour tout $u \in H_0^1(]0,1[)$, on a :

$$\int_0^1 xu'(x)u(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 u(x)^2\,dx,$$

   et en déduire que a est coercitive.

   (c) Soit $b : H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ donné par

$$\forall u, v \in H_0^1(]0,1[),\ b(u,v) = \int_0^1 xu'(x)v(x)\,dx,$$

   et soient u_1 et u_2 définies sur $[0,1]$ par $u_1(x) = \sin(\pi x)$ et $u_2(x) = \sin(2\pi x)$.

   i. Montrer que u_1 et u_2 appartiennent à $H_0^1(]0,1[)$ et que

$$\int_0^1 u_1(x)u_2(x)\,dx = 0.$$

   ii. En déduire que

$$b(u_1,u_2) + b(u_2,u_1) = 0.$$

   iii. Montrer que b n'est pas symétrique et en déduire que a ne l'est pas non plus.

3. Montrer que pour tout $f \in C^0([0,1];\mathbb{R})$, l'équation admet une unique solution faible.

4. Montrer qu'une telle solution appartient en fait à $C^2([0,1];\mathbb{R})$ et qu'elle est donc une solution classique.

4. Exercice.

1. Soit (u_n) une suite d'éléments de $C^0([0,1];\mathbb{R})$ telle que

$$u_n \to u \text{ dans } C^0([0,1];\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Soit h une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |u_n(x)| \leq M.$$

   (b) En utilisant le fait que h est uniformément continue sur $[-M, M]$ (puisque celui-ci est un segment), montrer que

$$h(u_n) \to h(u) \text{ dans } C^0([0,1];\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

2. Soit $g \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ où $p \in [1, +\infty[$. On cherche à montrer que $g(u)$ est dans $W^{1,p}(]0,1[)$ et à déterminer sa dérivée généralisée.

   (a) Justifier qu'il existe une suite (u_n) de fonctions de $C^\infty([0,1])$ telle que

$$u_n \to u \text{ dans } W^{1,p}(]0,1[;\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \to +\infty,$$

   et qui satisfait

$$\forall x \in [0,1],\ g(u_n(x)) = g(u_n(0)) + \int_0^x g'(u_n(t))u_n'(t)\,dt.$$

   (b) Montrer que

$$u_n \to u \text{ dans } C^0([0,1];\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

   (c) Montrer que si (a_n) et (b_n) sont respectivement des suites de $L^\infty(]0,1[)$ et de $L^p(]0,1[)$ (où $p \geq 1$), telles que

$$a_n \to a \text{ dans } L^\infty(]0,1[;\mathbb{R}) \text{ et } b_n \to b \text{ dans } L^p(]0,1[;\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \to +\infty,$$

   alors

$$a_n b_n \to ab \text{ dans } L^p(]0,1[;\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

   (d) En déduire que $g(u) \in W^{1,p}(]0,1[)$ et que sa dérivée généralisée satisfait

$$(g(u))' = g'(u)u'.$$

⋆

Barème <u>indicatif</u> : 1 : 5 points,
2 : 4 points,
3 : 5 points,
4 : 6 points,