Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

Examen. Mardi 18 janvier 2011, de 9 à 11 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Vous êtes invités à lire le sujet en entier, et à utiliser librement les résultats des questions précédentes, même si vous n'y avez pas répondu.*

1. Questions de cours.

1. Citer le théorème de Riesz sur le dual d'un espace de Hilbert.
2. Montrer que si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur un espace réel E, alors $N(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur E.
3. Citer le lemme de Fatou.
4. Citer le théorème de représentation "distributionnelle" des espaces de Sobolev.

2. Exercice.

On considère l'espace ℓ^2 des suites réelles de carrés sommables. On notera un élément de ℓ^2 (donc une suite de réels) u ou (u_n). On désignera par u_n sans parenthèse le n-ième terme de la suite u. On rappelle que l'espace ℓ^2 est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire :

$$\forall u, v \in \ell^2, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

On rappelle également que ℓ^2 peut être muni de la base hilbertienne $(e^k)_{k \in \mathbb{N}}$ où pour chaque $k \in \mathbb{N}$ la suite $e^k = (e^k_n)$ a pour terme général $e^k_n = \delta_{kn}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application
$$\begin{cases} \ell^2 \to \mathbb{R}, \\ u \mapsto u_n, \end{cases}$$
est une forme linéaire continue.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble
$$A_n := \{u \in \ell^2 \ / \ u_n \geq 0\},$$
est un fermé de ℓ^2. En déduire que
$$\mathcal{C} := \{u \in \ell^2 \ / \ \forall i \in \{0, \dots, 10\}, \ u_i \geq 0\},$$
est un convexe fermé de ℓ^2.

3. Pour x un réel, on note $x^+ = \max(x, 0)$. Soit T l'application qui à $u \in \ell^2$ associe $\tilde{u}$ de terme général :
$$\tilde{u}_n = u_n^+ \text{ pour } n \leq 10 \text{ et } \tilde{u}_n = u_n \text{ pour } n > 10.$$
Montrer que pour tout $u \in \ell^2$, $\tilde{u} \in \ell^2$. L'application $T : \ell^2 \to \ell^2$ est-elle linéaire ?

4. Montrer que pour tout $u \in \ell^2$, le projeté de u sur $\mathcal{C}$ est $T(u)$.

3. Exercice.

Dans cette exercice, on s'intéresse au problème aux limites suivant : pour $f \in C^0([0,1];\mathbb{R})$ on étudie le système d'inconnue $u : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) + u(1-x) = f(x) \text{ dans } [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. (a) Soit $u \in H_0^1(]0,1[)$. On introduit $\hat{u}(x) := u(1-x)$. Montrer que $\hat{u} \in H_0^1(]0,1[)$ et déterminer sa dérivée généralisée.
   (b) Montrer que
   $$\|u\|_{L^2} = \|\hat{u}\|_{L^2} \quad \text{et} \quad \|u\|_{H_0^1} = \|\hat{u}\|_{H_0^1}.$$
   (c) Montrer que
   $$\left| \int_0^1 u\hat{u} \right| \leq \|u\|_{L^2}^2.$$

2. (a) Montrer que si $u \in C^2([0,1];\mathbb{R})$ est solution du système (1), alors $\forall \varphi \in H_0^1(]0,1[)$, on a :
   $$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x) + (u(x) + u(1-x) - f(x))\varphi(x)\,dx = 0. \tag{2}$$
   (b) Justifier que l'intégrale précédente est bien définie quels que soient u et φ dans $H_0^1(]0,1[)$. On appellera solution faible de l'équation, toute fonction $u \in H_0^1(]0,1[)$ telle que (2) soit satisfait pour tout $\varphi \in H_0^1(]0,1[)$.

3. Soit $a : H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ donné par
   $$\forall u, v \in H_0^1(]0,1[),\ a(u,v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x) + u(x)v(x) + u(1-x)v(x))\,dx.$$
   (a) Montrer que a est bilinéaire et continue de $H_0^1 \times H_0^1$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que a est coercive.
   (c) Montrer que pour tout $f \in C^0([0,1];\mathbb{R})$, l'équation admet une unique solution faible.
   (d) Montrer qu'une telle solution appartient en fait à $C^2([0,1];\mathbb{R})$ et qu'elle est donc une solution classique.

4. Exercice.

On introduit la fonction $\Phi(t,x)$ pour $(t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right).$$

On écrira aussi $\Phi(t,x) = \Phi_t(x)$. On note $G(x) := \Phi\left(\frac{1}{2}, x\right)$ et on rappelle que

$$\int_{\mathbb{R}} G = 1.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on notera $G_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\Phi(t,x)$ peut s'écrire sous la forme $G_\varepsilon(x)$ avec un $\varepsilon > 0$ que l'on déterminera.

2. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ Montrer que pour tout $t > 0$, $u(t,x) := \Phi_t(x) * \varphi$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et que
$$\Phi_t(x) * \varphi \overset{L^1(\mathbb{R})}{\longrightarrow} \varphi \quad \text{lorsque} \quad t \to 0^+.$$

3. Soient $a, b > 0$ tels que $a < b$. Montrer que pour tout $t \in [a,b]$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|\Phi(t,x)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left(\frac{-x^2}{4b}\right).$$
Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in [a,b]$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|\partial_t \Phi(t,x)| \leq C(1+x^2) \exp\left(\frac{-x^2}{4b}\right).$$

4. Montrer que sur $[a,b] \times \mathbb{R}$, la fonction u est dérivable en t et dérivable deux fois en x et satisfait *l'équation de la chaleur* :
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

$\star$

Barême <u>indicatif</u> : 1 : 5 points,
2 : 5 points,
3 : 5 points,
4 : 5 points,