Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

Examen. Mercredi 31 août 2011, de 9 à 11 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Vous êtes invités à lire le sujet en entier, et à utiliser librement les résultats des questions précédentes, même si vous n'y avez pas répondu.*

1. Questions de cours.

1. Citer le théorème de convergence dominée.
2. Citer le théorème de réprésentation concernant les espaces duaux des espaces L^p.
3. Donner la définition de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(0,1)$.
4. Montrer que dans un espace de Hilbert, une partie est totale si et seulement si son orthogonal est réduit à $\{0\}$.

2. Exercice.

Soit H un espace de Hilbert réel, et C un convexe fermé non vide de H. Pour tout x de H, on note $P_C(x)$ le projeté de x sur C.

Soient x et y deux éléments quelconques de H.

1. Montrer que

$$\langle x - P_C(x), P_C(y) - P_C(x)\rangle \leq 0 \quad \text{et } \langle y - P_C(y), P_C(x) - P_C(y)\rangle \leq 0.$$

2. Montrer que

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 = \|P_C(x)-P_C(y)\|^2 + \|x-y+P_C(y)-P_C(x)\|^2 + 2\langle x-P_C(x), P_C(x)-P_C(y)\rangle \\ + 2\langle P_C(y)-y, P_C(x)-P_C(y)\rangle.\end{aligned}$$

3. En déduire que P_C est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x-y\|.$$

3. Exercice.

1. Soit H un espace de Hilbert, et M et N deux sous-espaces fermés de H, orthogonaux entre eux. On rappelle la notation

$$M + N := \{u + v \text{ lorsque } u \text{ parcourt } M \text{ et } v \text{ parcourt } N\}.$$

a. Montrer que tout élément x de $M + N$ s'écrit **de manière unique** sous la forme

$$x = u + v,$$

avec $u \in M$ et $v \in N$.

b. Soit (x_n) une suite d'éléments de $M + N$, qui converge vers x dans H. Pour chaque n, on note $u_n \in M$ et $v_n \in \mathbb{N}$ les uniques élements de M et N respectivement tels que $x_n = u_n + v_n$ (grâce à la question précédente). Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent.

c. En déduire que $M + N$ est fermé dans H.

2. Soit H un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On introduit

$$M := \{e_{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\}^{\perp} \text{ et } N := \{e_{2n} - (2n + 2)e_{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\}^{\perp}.$$

1. Justifier rapidement que M et N sont des sous-espaces fermés de H.
2. Soit x une combinaison linéaire (sous entendu : finie !) des vecteurs e_n. Montrer qu'il existe $u \in M$ et $v \in N$ tels que
$$x = u + v.$$
On pourra chercher u et v sous la forme de combinaisons linéaires des e_n, et commencer par déterminer les termes correspondant à indice impair pour v.
3. En déduire que $M + N$ est dense dans H.
4. Le vecteur
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} e_n,$$
appartient-il à $M + N$?
5. En déduire que $M + N$ n'est pas fermé dans H.

4. Exercice.

Soit $c \in C^2([0,1])$ une fonction décroissante. On s'intéresse au problème aux limites suivant : pour $f \in C^0([0,1];\mathbb{R})$ on étudie le système d'inconnue $u : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u'(x) = f(x) \text{ dans } [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que si $u \in C^2([0,1];\mathbb{R})$ est solution du système (1), alors $\forall \varphi \in H_0^1(]0,1[)$, on a :

$$\int_0^1 \Big(u'(x)\varphi'(x) + c(x)u'(x)\varphi(x) - f(x)\varphi(x) \Big)\, dx = 0. \tag{2}$$

2. Justifier que l'intégrale précédente est bien définie quels que soient u et φ dans $H_0^1(]0,1[)$. On appellera solution faible de l'équation, toute fonction $u \in H_0^1(]0,1[)$ telle que (2) soit satisfait pour tout $\varphi \in H_0^1(]0,1[)$.

3. Soit $a : H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ donné par

$$\forall u, v \in H_0^1(]0,1[),\ a(u,v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v'(x))\, dx.$$

   a. Montrer que a est bilinéaire et continue de $H_0^1 \times H_0^1$ dans $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que a est coercive.[1]
   c. Montrer que pour tout $f \in C^0([0,1];\mathbb{R})$, l'équation admet une unique solution faible.
   d. Montrer qu'une telle solution appartient en fait à $C^2([0,1];\mathbb{R})$ et qu'elle est donc une solution classique.

⋆

Barème **<u>indicatif</u>** (et sur 21 points) :
1 : 5 points,
2 : 3 points,
3 : 7 points,
4 : 6 points,

[1] Détaillez particulièrement la réponse à cette question...