Université Paris-Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

Examen 2009-2010, deuxième session. Durée : 2 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Vous êtes invités à lire le sujet en entier, et à utiliser librement les résultats des questions précédentes, même si vous n'y avez pas répondu.*

1. Questions de cours.

1. Citer le théorème de projection sur les convexes d'un espace de Hilbert.
2. Citer le théorème de Lax-Milgram.
3. Donner l'énoncé du théorème de Fubini (pour des fonctions qui n'ont pas spécialement de contrainte de signe).
4. Montrer que dans un espace de Hilbert H, si (x_n) est une suite d'éléments de H deux à deux orthogonaux, on a :

$$\sum x_n \text{ converge dans } H \iff \sum \|x_n\|^2 \text{ converge dans } \mathbb{R}.$$

2. Exercice.

1. Montrer que l'espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(0,1)$.
2. Soit $f \in L^2(0,1)$. Pour a, b et c réels, on note $P_{a,b,c}(x)$ le polynôme $P_{a,b,c}(x) = ax^2+bx+c$. Montrer qu'il existe un unique triplet $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ de réels, tel qu'on ait pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\|f - P_{\overline{a},\overline{b},\overline{c}}\|_{L^2(0,1)} \leq \|f - P_{a,b,c}\|_{L^2(0,1)}.$$

   On dira que $P_{\overline{a},\overline{b},\overline{c}}$ est la « meilleure approximation L^2 » de f par une fonction polynomiale de degré au plus 2.

3. Montrer que dans ce cas on a :

$$\int_0^1 (f(x) - P_{\overline{a},\overline{b},\overline{c}}(x))\,dx = \int_0^1 (f(x) - P_{\overline{a},\overline{b},\overline{c}}(x))x\,dx = \int_0^1 (f(x) - P_{\overline{a},\overline{b},\overline{c}}(x))x^2\,dx = 0.$$

4. On fixe maintenant $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. Déterminer la meilleure approximation L^2 de f par une fonction polynomiale de degré au plus 2.

3. Exercice.

Dans cette exercice, on s'intéresse au problème aux limites suivant : pour $f \in C^0([0,1];\mathbb{R})$ on considère le système :

$$\begin{cases} -u''(x) - u'(x) + (3+x)u(x) = f(x) \text{ dans } [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que si $u \in C^2([0,1];\mathbb{R})$ est solution de ce système, alors $\forall \varphi \in H_0^1(]0,1[)$, on a :

$$\int_0^1 \left[u'(x)\varphi'(x) + (-u'(x) + (3+x)u(x) - f(x))\varphi(x) \right] dx = 0. \tag{2}$$

2. Montrer que l'intégrale précédente est bien définie quels que soient u et φ dans $H_0^1(]0,1[)$. On appellera solution faible de l'équation, toute fonction $u \in H_0^1(]0,1[)$ telle que (2) soit satisfait pour tout $\varphi \in H_0^1(]0,1[)$.

3. Soit $a : H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ donné par

$$\forall u, v \in H_0^1(]0,1[),\ a(u,v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x) - u'(x)v(x) + (3+x)u(x)v(x))\, dx.$$

   (a) Montrer que a est bilinéaire et continue.

   (b) Montrer que a est coercitive. (On pourra par exemple utiliser l'inégalité $|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ valable pour tous réels α et β.)

4. Soit $b : H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ donné par

$$\forall u, v \in H_0^1(]0,1[),\ b(u,v) = \int_0^1 u'(x)v(x)\, dx,$$

   Montrer que b n'est pas symétrique et que a ne l'est pas non plus.

5. Montrer que pour tout $f \in C^0([0,1];\mathbb{R})$, l'équation admet une unique solution faible.

6. Montrer qu'une telle solution appartient en fait à $C^2([0,1];\mathbb{R})$ et qu'elle est donc une solution classique.

4. Exercice.

1. Soient $u, v \in W^{1,p}(]0,1[)$ où $p \in [1, +\infty[$.

   (a) Justifier qu'il existe des suites (u_n) et (v_n) de fonctions de $C^\infty([0,1])$ telle que

$$u_n \to u \text{ dans } W^{1,p}(]0,1[;\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \to +\infty,$$
$$v_n \to v \text{ dans } W^{1,p}(]0,1[;\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \to +\infty,$$

   et qui satisfont

$$\forall x \in [0,1],\ u_n(x)v_n(x) = u_n(0)v_n(0) + \int_0^x \left(u_n'(t)v_n(t) + u_n(t)v_n'(t)\right) dt.$$

(b) Montrer que

$$u_n \to u \text{ dans } C^0([0,1];\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \to +\infty,$$
$$v_n \to v \text{ dans } C^0([0,1];\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

(c) En déduire que $uv \in W^{1,p}(]0,1[)$, que sa dérivée généralisée satisfait

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

(d) Montrer qu'il existe $C > 0$ indépendante de u et v telle que

$$\|uv\|_{W^{1,p}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}\|v\|_{W^{1,p}}.$$

2. Soit $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u^k \in W^{1,p}(]0,1[)$.

(b) Montrer que $\exp(u) \in W^{1,p}(]0,1[)$ et déterminer sa dérivée généralisée.

⋆

Barème <u>indicatif</u> : 1 : 5 points,
2 : 4 points,
3 : 6 points,
4 : 5 points,