Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2

Examen 28.08.2013

Tous documents, calculatrices et portables sont interdits. Durée : 2h.

Questions de cours (6 pts)

On considère un ouvert O de $\mathbb{R}^2$, une fonction $f : O \subset R^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^2, deux points $x = (x_1, x_2)$ et $h = (h_1, h_2)$ fixés dans $\mathbb{R}^2$, tels que le segment $[x, x+h]$ soit tout entier contenu dans l'ouvert O, et on définit une fonction $\varphi : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi(t) = f(x+h) - f(x+t\,h) - (1-t)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x+t\,h)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x+t\,h)\,h_2\right] - C\,(1-t)^2$$

où : C est une constante réelle donnée.

1. Calculer la dérivée $\varphi'(t)$ de φ en tout point t de l'intervalle $]0,1[$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f au point $x+t\,h$.
2. Déduire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre deux, appliquée à f, sur le segment $[x, x+h]$.

Exercice 1 (3 pts)

Trouver un équivalent simple de : $u_n = \left(n^3+1\right)^{1/3} - \left(n^2+1\right)^{1/2}$ pour n voisin de $+\infty$.

Exercice 2 (4 pts)

Soient u et v deux fonctions continues d'une variable réelle, définies et strictement positives au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}$.

1. Etablir l'implication : $u \overset{a}{\sim} v \;\Rightarrow\; \left(\ln u \overset{a}{\sim} \ln v \text{ ou : } u(a) = v(a) = 1\right)$.
2. Donner un contre-exemple simple prouvant : $u \overset{a}{\sim} v \;\not\Rightarrow\; \ln u \overset{a}{\sim} \ln v$.

TSVP $\rightsquigarrow$

Exercice 3 (3 pts)

On considère l'intégrale : $I = \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$, et, pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k^2 x^2}{2n^2}}$$

1. Justifier la double inégalité : $S_n \leq I \leq S_n + \left(1 - e^{-x^2/2}\right) \frac{x}{n}$.
2. Comment choisir n pour que : $0 \leq I - S_n \leq 10^{-3}$?

Exercice 4 (6 pts)

On considère l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{x^4 (1-x)^4}{1+x^2}\, dx$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division puissances décroissantes de $x^4 (1-x)^4$ par x^2+1.

☞ *indication: Vérifier soigneusement votre calcul ! On pourra, par exemple :*

a. Effectuer le produit du quotient par x^2+1

b. Tester les valeurs du quotient et du reste pour : $x = 1$ *et :* $x = 0$.

2. Déduire la valeur de I, puis la double inégalité : $\left(1 - \frac{1}{1025}\right) \frac{22}{7} \leq \pi \leq \frac{22}{7}$.

☞ *indication: Majorer :* $x^4 (1-x)^4$.