Examen du 01/06/2015
"Optimisation et programmation dynamique"

Master mention Mathématiques appliquées 1ère année
Université Paris Dauphine

Exercice 1. Pour un entier $T \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 = 1$, on considère le problème

$$\inf_{(x_{t+1},u_t)_{t=0,\dots,T-1}} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{2}\left(x_t^2 + u_t^2\right) + \frac{1}{2}x_T^2$$

sous contrainte $(x_{t+1}, u_t)_{t=0,\dots,T-1} \in \mathbb{R}^{2T}$ et

$$x_{t+1} = x_t + u_t \qquad \forall t \in \{0, \dots, T-1\}.$$

Dans les questions 1 à 3, on considère le problème comme un problème d'optimisation sous contrainte. Dans la question 4, on le regarde comme un problème de contrôle optimal en temps discret.

1. Montrer que le problème possède au moins une solution $(\bar{x}_{t+1}, \bar{u}_t)_{t=0,\dots,T-1} \in \mathbb{R}^{2T}$.
2. Montrer que cette solution est unique.
3. Justifier et énoncer les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème.
4. Pour $(t_0, x_0) \in \{0, \dots, T-1\} \times \mathbb{R}$ et $x_{t_0} = x_0$, on pose

$$V(t_0, x_0) = \min_{(x_{t+1},u_t)_{t=t_0,\dots,T-1}} \sum_{t=t_0}^{T-1} \frac{1}{2}\left(x_t^2 + u_t^2\right) + \frac{1}{2}x_T^2$$

   sous contrainte $(x_{t+1}, u_t)_{t=t_0,\dots,T-1} \in \mathbb{R}^{T-t_0}$ et

$$x_{t+1} = x_t + u_t \qquad \forall t \in \{t_0, \dots, T-1\}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + V(t+1, x+u).$$

   (b) En déduire par récurrence (décroissante) que, pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$, il existe $\alpha_t \in [1, +\infty[$ tel que

$$V(t, x) = \frac{1}{2}\alpha_t x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   On montrera que $\alpha_{T-1} = 3/2$ et on donnera l'expression de α_t en fonction de α_{t+1} pour tout $t \in \{0, \dots, T-2\}$.

   (c) Calculer la solution du problème pour $T = 2$.

Exercice 2. Soit H^1 l'espace de Sobolev $W^{1,2}([0,1],\mathbb{R})$ et H_0^1 l'ensemble des éléments x de H^1 tels que $x(0) = x(1) = 0$. On rappelle que, si $x \in H_0^1$, alors la fonction $y(t) := \max\{0, x(t)\}$ appartient aussi à H_0^1 et vérifie, pour presque tout $t \in [0,1]$,

$$y'(t) = \begin{cases} x'(t) & \text{si } x(t) > 0 \\ 0 & \text{si } x(t) \leq 0 \end{cases}$$

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ *strictement décroissante avec* $h(0) = 0$. On définit E comme étant l'ensemble des éléments $x \in H_0^1$ tels que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}(x'(t))^2 dt = 1$.

On considère le problème

$$(P) \qquad \inf_{x \in E} J(x) \qquad \text{où } J(x) = \int_0^1 h(x(t))\, dt.$$

1. On suppose qu'il existe une solution $\bar{x}(\cdot)$ au problème (P) qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que $\bar{x}$ n'est pas identiquement nulle.
   (b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\lambda \bar{x}''(t) = h'(\bar{x}(t)) \qquad \forall t \in [0,1].$$
   (c) On suppose, *dans cette question seulement*, que $h(z) = -z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Calculer alors $\bar{x}$.
   (d) En utilisant le fait que h est strictement décroissante et que $h(0) = 0$, montrer qu'il existe $x \in E$ avec $J(x) < 0$.
   (e) En déduire qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $\bar{x}(t) > 0$.
   (f) Conclure que $\bar{x}$ est une fonction concave sur $[0,1]$.
2. Soit (x_n) une suite minimisante du problème (P) :
   $$x_n \in E \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in E} J(x).$$
   (a) On pose $\tilde{x}_n(t) = \max\{0, x_n(t)\}$ et $\theta_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}(\tilde{x}_n'(t))^2 dt$. Montrer, en utilisant la question 1.(d), qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\theta_n \in]0,1]$ pour tout $n \geq n_0$.
   (b) On pose alors $y_n(t) = \theta_n^{-1/2} \tilde{x}_n(t)$. Montrer que (y_n) est encore une suite minimisante pour le problème (P).

   On rappelle un résultat de cours qui affirme qu'il existe une sous-suite (y_{n_k}) et $y \in H_0^1$ tels que la suite (y'_{n_k}) tend faiblement vers y' dans $L^2([0,1])$ et la suite (y_{n_k}) converge uniformément vers y sur $[0,1]$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}(y'(t))^2 dt \leq 1$.
   (d) Montrer qu'en fait $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}(y'(t))^2 dt = 1$.
   (difficile : on pourra raisonner par l'absurde, puis s'inspirer de la question 2-(b)).
   (e) Conclure à l'existence d'une solution au problème (P).

Barême indicatif : Ex. 1 : 10 pts, Ex. 2-1 : 10 pts, Ex. 2-2 : 10 pts.