# Exercices sur le cours
# “Optimisation et programmation dynamique”

2020-2021
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année
Université Paris Dauphine

## 1 Optimisation

### 1.1 Existence et unicité d'un minimum, convexité

**Exercice 1** (Existence d'une solution)**.** Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $f$ est prolongeable par continuité sur l'adhérence $\overline{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$ et qu'il existe $x_0 \in \mathcal{O}$ tel que
$$\inf_{x\in\partial\mathcal{O}} f(x) \ > \ f(x_0).$$
Montrer que $f$ a un minimum sur $\mathcal{O}$.
2. Même question si
$$\lim_{x\in\mathcal{O},\ x\to\partial\mathcal{O}} f(x) = +\infty.$$

**Exercice 2** (Distance entre deux ensembles)**.** Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles fermés et non vides de $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que si $A$ est compact, alors le problème
$$\min_{a\in A, b\in B} \|a-b\|$$
admet (au moins) une solution.
2. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux en général si on ne suppose pas que $A$ ou $B$ est compact, même si $A$ et $B$ sont convexes.

**Exercice 3** ($\alpha-$convexité)**.**

1. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de $K$ et $\alpha > 0$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $f$ est $\alpha$-fortement convexe sur $K$, c'est-à-dire que
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in K,\ t \in [0,1].$$
(ii) $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2, \quad \forall x, y \in K$
(iii) $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x\rangle \geq \alpha\|y-x\|^2, \quad \forall x, y \in K.$
On dit alors que $f$ est $\alpha-$convexe sur $K$.
2. Montrer que si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est $\alpha-$convexe, alors $f$ est coercive sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire
$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
3. Soit $A$ une matrice $d \times d$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^d$ et $c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f$ est $\alpha-$convexe sur $\mathbb{R}^d$.

## 1.2 Le théorème de Kuhn et Tucker

**Exercice 4.** On considère le problème

$$\max_{g(x)\leq 0} f(x)$$

Montrer que, si $x$ est un maximum du problème et la contrainte est qualifiée en $x$, alors il existe $\lambda \leq 0$ tel que

$$\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0 \ .$$

**Exercice 5.** On considère le problème de la boite

$$\begin{array}{ll} \quad\min & (x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3) \\ x_i \geq 0 & \\ x_1x_2x_3 = 2 & \end{array}$$

1. Proposer une interprétation du problème.
2. On suppose que le problème admet une solution. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité et calculer cette solution.
3. (difficile) Montrer que le problème admet bien une solution

**Exercice 6.** On considère le problème

$$\max_{x^3+y^3-3xy+1=0} (x+y)$$

Calculer la solution de ce problème (on admet l'existence d'un maximum).

**Exercice 7.** On considère le problème

$$\begin{array}{ll} \quad\max & (x_1 + x_2) \\ 0 \leq x_i \leq 42 & \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 72 & \end{array}$$

Calculer la solution de ce problème.

**Exercice 8.** On considère le problème

$$\begin{array}{ll} \quad\max & (3x + y) \\ 0 \leq x & \\ 0 \leq y \leq (1-x)^3 & \end{array}$$

1. Montrer que le point $(0, 1)$ est le seul point vérifiant les conditions nécessaires.
2. Montrer que le point $(1, 0)$ est le minimum du problème.

**Exercice 9.** Soit $A$ une matrice symétrique de format $n \times n$.

1. Montrer que
$$m = \min_{\|x\|=1} x^T A x$$
est la plus petite valeur propre de $A$.

2. Soient $\{v_i\}_{i=1,\dots,k}$ une famille de vecteurs propres de $A$ (où $k < n$), deux à deux orthogonaux. Montrer que la quantité

$$\min_{\substack{\|x\|=1,\\ v_i^T x = 0,\ \forall i=1,\dots,k}} x^T A x$$

est une valeur propre de $A$.

**Exercice 10.** Soit $P$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^N$ d'équation $c^T x = d$ (où $c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$). Calculer la projection orthogonale d'un point $y$ de $\mathbb{R}^n$ sur $P$, c'est-à-dire le minimum du problème

$$\min_{c^T x = d} \frac{1}{2}\|x - y\|^2$$

**Exercice 11.** Quelles conditions doivent vérifier les réels $p$, $q$, $r$ pour que la fonction linéaire $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to x_1 + px_2 + qx_3 + rx_4$ atteigne son maximum sous les contraintes $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ au point $(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ?

**Exercice 12.** Les problèmes suivants ont-ils a priori une unique solution ? La (les) calculer.

$$\min_{\substack{x+y\geq 1\\ x+2y+z\geq 0\\ y\leq z}} x^2 + y^2 + 2z^2 \qquad\qquad \min_{\substack{y\leq 0\\ y\geq x\\ x+y+3\geq 0}} x^2 + y$$

**Exercice 13.** Calculer, en fonction du paramètre $u \in \mathbb{R}$, la solution du problème

$$\min_{\begin{cases} 0 \leq x \leq y \leq z \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}} (xy + uxz + u^2 yz)$$

**Exercice 14.** Déterminer les points vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité et trouver la solution du problème si celle-ci existe :

$$\max_{\begin{cases} y \leq 0,\ y \leq x \\ x + y + 3 \geq 0 \end{cases}} x^2 + y$$

**Exercice 15.** Soient $M$ la matrice
$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $S$ l'ensemble convexe

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1,\ x_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3\}$$

Montrer que le problème

$$\max_{X \in S} X^T M X$$

admet une unique solution. La calculer.

Ind. L'inverse de $M$ est $M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

**Exercice 16.** On cherche à résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{(x,y)\in K} (x-2)^2 + y^2 \qquad \text{où} \qquad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}\ .$$

1. Montrer que le problème admet au moins une solution.
2. Montrer que la contrainte est qualifiée en tout point.
3. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème.
4. Trouver tous les points satisfaisant les conditions nécessaires d'optimalité.
5. En déduire la (ou les) solution(s) du problème $(\mathcal{P})$.

### 1.3 Dualité

**Exercice 17.** Résoudre par dualité le problème

$$\min_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y+z\leq 0}} \frac{1}{2}\left[(x-2)^2 + y^2 + z^2\right]$$

**Exercice 18.** Calculer le problème dual de

$$\min_{\substack{-\log(x) - y \leq 0\\ y\geq 1}} x + \frac{1}{2}y^2$$

**Exercice 19.** Résoudre par dualité le problème

$$\min_{\frac{1}{2}x^TAx\leq 1} c^Tx$$

où $A$ est une matrice symétrique définie positive de format $n \times n$, et $c$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 20.** On s'intéresse au problème

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{Cx\leq d} \frac{1}{2}x^TAx + b^Tx$$

où $A$ est une matrice $n \times n$ définie positive, $b$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $C$ est une matrice de format $l \times n$ et $d$ est un vecteur de $\mathbb{R}^l$. L'expression $Cx \leq d$ signifie que toute composante de $Cx$ est inférieure ou égale à la composante correspondante de $d$. Montrer que le problème dual du problème $(\mathcal{P})$ est le problème suivant

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}^l_+} -\frac{1}{2}b^TA^{-1}b - \frac{1}{2}\lambda^TCA^{-1}C^T\lambda - (b^TA^{-1}C^T + d^T)\lambda$$

**Exercice 21.** On considère $a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ des réels strictement positifs, et $x$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i^2/a_i^2 > 1$, c'est-à-dire que $x$ n'appartient pas à l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2/a_i^2 \leq 1\}$$

Calculer le problème dual $\mathcal{G}(\lambda)$ du problème

$$\min_{u \in \mathcal{E}} \|u - x\|^2$$

Montrer que le maximum de $\mathcal{G}(\lambda)$ vérifie

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2 + \lambda)^2} = 1 \ .$$

**Exercice 22.** Résoudre par dualité le problème

$$\min_{\langle s,x \rangle \leq 0} \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle c, x \rangle$$

où $s$ et $c$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ non nuls.

**Exercice 23.** On considère le problème

$$\min_{Ax=b} \frac{1}{2}\|x\|^2$$

où $A$ est une matrice $m \times n$ et $b$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

1. Quelle est la signification géométrique de ce problème.
2. Calculer le problème dual $(\mathcal{D})$.
3. A quelle condition le problème dual admet-il une unique solution ?
4. Calculer dans ce cas cette solution en fonction de $A$ et $b$.

*(On admettra que la méthode de dualité fonctionne aussi pour des contraintes d'égalité affines)*

## 1.4 Méthodes numériques

### 1.4.1 Méthodes de pénalisation

**Exercice 24** (Méthode de pénalisation intérieure)**.** Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$, strictement convexes avec $g$ coercive. On suppose qu'il existe un point $x_0$ tel que $g(x_0) < 0$.

1. Montrer que le problème sous contrainte

$$\min_{x \in K} f(x) \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ g(x) \leq 0\}$$

possède une unique solution $\bar{x}$.

L'objectif du problème est d'approcher $\bar{x}$ par une méthode de pénalisation. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$J_\epsilon(x) := f(x) - \frac{\epsilon}{g(x)} \qquad \forall x \in Int(K) = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ g(x) < 0\}.$$

2. Montrer que $J_\epsilon$ possède un unique minimum $x_\epsilon$ dans $Int(K)$.
3. Soit $x \in Int(K)$. Vérifiez que $J_\epsilon(x) \geq J_\epsilon(x_\epsilon) \geq f(x_\epsilon)$. En déduire que, si $\tilde{x}$ est une valeur d'adhérence de $(x_\epsilon)$ lorsque $\epsilon \to 0$, alors $f(x) \geq f(\tilde{x})$.
4. Conclure que $(x_\epsilon)$ tend vers $\bar{x}$ lorsque $\epsilon \to 0$.

5. On suppose que $f$ et $g$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^d$. Ecrire la condition d'optimalité pour $x_\epsilon$ et redémontrer l'existence d'un multiplicateur $\lambda \geq 0$ pour $\bar{x}$.
6. Suggérer une méthode numérique d'approximation de $\bar{x}$.

**Exercice 25** (Méthode de pénalisation extérieure)**.** Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$, strictement convexes avec $f$ coercive. On note $\bar{x}$ l'unique solution du problème sous contrainte

$$\min_{x\in K} f(x) \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ g(x) \leq 0\}$$

L'objectif du problème est d'approcher $\bar{x}$ par une méthode de pénalisation extérieure. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$J_\epsilon(x) := f(x) + \frac{1}{\epsilon}\left(\max\{0, g(x)\}\right)^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Montrer que $J_\epsilon$ possède un unique minimum $x_\epsilon$ dans $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que la famille $(x_\epsilon)$ est bornée pour $\epsilon \in (0, 1)$.
3. Soit $x \in K$. Vérifiez que $J_\epsilon(x) \geq J_\epsilon(x_\epsilon) \geq f(x_\epsilon)$. En déduire que, si $\tilde{x}$ est une valeur d'adhérence de $(x_\epsilon)$ lorsque $\epsilon \to 0$, alors $f(x) \geq f(\tilde{x})$.
4. Conclure que $(x_\epsilon)$ tend vers $\bar{x}$ lorsque $\epsilon \to 0$.
5. On suppose que $f$ et $g$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^d$. Vérifier que $J_\epsilon$ est de classe $C^1$ et suggérer une méthode numérique d'approximation de $\bar{x}$.
6. On suppose que $f$ et $g$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^d$ et que la contrainte $K$ est qualifiée. On dit que la pénalisation est exacte si il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $x_\epsilon = \bar{x}$ pour tout $\epsilon \in ]0, \epsilon_0[$. Vérifier que la pénalisation est exacte, si et seulement si, le multiplicateur dans la condition nécessaire d'optimalité pour $\bar{x}$ est nul.
7. Comparer les résultats avec la méthode de pénalisation intérieure de l'exercice précédent.

**Exercice 26** (Méthode de pénalisation exacte)**.** Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^d$, strictement convexes avec $f$ coercive. On note $\bar{x}$ l'unique solution du problème sous contrainte

$$\min_{x\in K} f(x) \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ g(x) \leq 0\}$$

On suppose que la contrainte $K$ est qualifiée et on note $\lambda$ le multiplicateur dans la condition nécessaire d'optimalité pour $\bar{x}$.

Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$J_\epsilon(x) := f(x) + \frac{1}{\epsilon}\left(\max\{0, g(x)\}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Montrer que $J_\epsilon$ possède un unique minimum $x_\epsilon$ dans $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que si $\epsilon \in ]0, 1/\lambda[$, alors $x_\epsilon = \bar{x}$.
3. En pratique, la valeur de $\lambda$ est inconnue et on doit chercher à l'estimer. Montrer que $x_\epsilon = \bar{x}$ si $\epsilon \in ]0, M^{-1}[$ avec $M := \max_{x\in K} \|\nabla f(x)\| / \min_{x\in\partial K} \|\nabla g(x)\|$.

### 1.4.2 Programmation linéaire et algorithme du simplexe

**Exercice 27.** L'objectif de l'exercice est de montrer qu'on peut mettre tout problème d'optimisation avec critère et contraintes affines sous la forme standard de la programmation linéaire. Soit $C$ une matrice de format $m \times n$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^m$.

1. On considère le problème

$$(P1) \qquad \inf_{x \in K} \langle a, x \rangle \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^n_+,\ Cx \leq d\}.$$

   On définit alors $\tilde{a} = (a, 0) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\tilde{C} := (C\ I_m)$ de format $m \times (n+m)$. Montrer que le problème $(P1)$ est "équivalent" au problème

$$(P2) \qquad \inf_{(x,y) \in \tilde{K}} \langle \tilde{a}, (x,y) \rangle \qquad \text{où } \tilde{K} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}_+,\ \tilde{C}(x,y) = d\}$$

   au sens où la valeur de l'infimum est la même et où l'on peut construire les solutions de l'un à partir des solutions de l'autre.

2. On considère le problème

$$(P3) \qquad \inf_{x \in K} \langle a, x \rangle \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^n,\ Cx = d\}.$$

   On pose $\tilde{a} = (a, -a)$ et $\tilde{C} = (C, -C)$. Montrer que le problème $(P3)$ est "équivalent" au problème

$$(P4) \qquad \inf_{(x,y) \in \tilde{K}} \langle \tilde{a}, (x,y) \rangle \qquad \text{où } \tilde{K} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}_+,\ \tilde{C}(x,y) = d\}$$

**Exercice 28.** Soit

$$K := \{x = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5_+ \ :\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1\}.$$

Déterminer les sommets de $K$.

**Exercice 29.** On rappelle qu'un point extrémal d'un ensemble convexe fermé $K \subset \mathbb{R}^n$ est un point $x$ de $K$ tel que, s'il existe $x^1, x^2 \in K$ et $\lambda \in ]0,1[$ tels que $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda x^2)$, alors $x^1 = x^2 = x$.

Montrer qu'un ensemble convexe compact $K$ possède toujours un point extrémal. Est-ce encore le cas si $K$ n'est pas compact ?
(Indication : on pourra considérer le point $x$ de $K$ de norme euclidienne maximale.)

**Exercice 30.** On rappelle que, si $\Gamma$ est une matrice de format $M \times N$, l'ensemble $\{\Gamma x,\ x \in \mathbb{R}^N_+\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^M$. On considère le problème de programmation linéaire

$$(P) \qquad \inf_{x \in K} \langle a, x \rangle \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^n_+,\ Cx = d\}.$$

Montrer que soit l'infimum est $-\infty$, soit le problème admet un minimum.
(Indication : on pourra considérer l'ensemble $\{(Cx, \langle a, x \rangle),\ x \in \mathbb{R}^n_+\}$.)

## 2 Programmation dynamique

### 2.1 Contrôle optimal en temps discret

**Exercice 31.** Pour $x \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème

$$W(x) := \inf\{\sum_{i=0}^{N-1} u_i^2,\ \text{où } u_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{N-1} u_i = x\}$$

On se propose de comparer $W(x)$ par deux méthodes :

1. Calculer $W(x)$ en utilisant les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker.
2. Ecrire le problème comme un problème de contrôle à horizon $N$ et utiliser le principe de programmation dynamique. Pour cela,
   (a) Réécrire le problème en posant $U_n(x) = [0, x]$ pour $n \leq N-2$, $U_{N-1}(x) = x$, $f_n(x, u) = x - u$, $g = 0$, $\ell_n(x, u) = u^2$.
   (b) Ecrire la programmation dynamique pour les fonctions valeurs $V_n$.
   (c) En déduire que $V_n(x) = x^2/(N-n)$.
   (d) Calculer $W(x)$.
3. Comparer les deux méthodes.

**Exercice 32.** On s'intéresse au problème de croissance optimale décrit par

$$\sup_{(k_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(k_t^\alpha - k_{t+1}\right)$$

sous les contraintes : $k_0 = k$ (où $k > 0$ est donné), $k_{t+1} \in [0, k_t^\alpha]$ pour tout $t \in \mathbb{N}$. Le taux d'actualisation $\beta \in ]0, 1[$ et la puissance $\alpha \in ]0, 1[$ sont donnés.

Pour $k > 0$, on note $W(k)$ la valeur de ce problème. L'interprétation économique est que $(k_t)$ représente le capital à l'instant $t$, la différence $k_t^\alpha - k_{t+1}$ étant la consommation (en gros la différence entre la production $k_t^\alpha$ et l'investissement $k_{t+1}$ à l'instant $t$).

1. Pour $k > 0$, soit $v(k)$ la fonction valeur du problème

$$v(k) := \sup_{(k_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(k_t^\alpha\right)$$

   sous les mèmes contraintes que pour $W$. Montrer que $v(k) = \dfrac{\alpha \ln(k)}{1 - \alpha\beta}$ et que que $W \leq v$.
2. Montrer que $W$ est solution de l'équation de de point fixe : $f = Tf$ avec $T$ l'opérateur défini par

$$Tf(x) := \sup_{y \in [0, x^\alpha]} \left\{\ln(x^\alpha - y) + \beta f(y)\right\}.$$

   pour tout $x > 0$.
3. Pourquoi ne peut on pas affirmer ici directement que $W$ est l'unique solution de l'équation de Bellman ?
4. Montrer que $Tv = v + c$ avec $c$ une constante négative à déterminer.
5. Calculer les itérées $T^n v$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que cette suite converge vers une limite $v_\infty$ que l'on explicitera. Montrer enfin que $Tv_\infty = v_\infty$.

6. Montrer que $W \leq v_\infty$.
7. Montrer que $W \geq v_\infty$ (plus difficile) et conclure.
8. Montrer que le problème initial admet une solution unique que l'on calculera. On notera $(k_t^*)$ cette politique optimale.
9. Etudier la dynamique optimale $(k_t^*)$ (monotonie, convergence).

**Exercice 33.** Pour $x \geq 0$ et $N \geq 1$ un entier, on définit

$$V_N(x) := \sup \left\{ \prod_{i=0}^{N-1} x_i : x_i \geq 0, \sum_{i=0}^{N-1} x_i = x \right\}$$

**1.** Calculer $V_1$

**2.** Trouver une relation de récurrence entre $V_N$ et $V_{N-1}$

**3.** Montrer que

$$V_N(x) = \frac{x^N}{N^N}$$

**4.** En déduire l'inégalité entre la moyenne géométrique et arithmétique

$$(|x_1| \cdots |x_N|)^{\frac{1}{N}} \leq \frac{|x_1| + \cdots + |x_N|}{N}$$

Et étudier le cas d'égalité.

**Exercice 34.** Résoudre le problème

$$\min_{x_t} \sum_{t=0}^{2} (x_t^2 + tu_t^2) + x_3^2$$

avec $x_t$ vérifiant la dynamique $x_{t+1} = x_t - u_t$ et $x_0 = 1$

**Exercice 35.** Trouver les extrema de

$$\sum_{t=0}^{3} (te^{u_t} + x_t) - 2x_4$$

avec $x_t$ vérifiant la dynamique $x_{t+1} = x_t + u_t$ et $x_0 = x$ et sous la contrainte $0 \leq u \leq 1$

**Exercice 36.** Résoudre le problème

$$\min_{u} \sum_{t=1}^{4} -2u_t - 3(x_t - u_t)$$

avec $x_t$ vérifiant la dynamique $x_{t+1} = 0.8u_t + 0.5(x_t - u_t)$ sous la contrainte $0 \leq u$ et $0 \leq (x - u)$

**Exercice 37.** Résoudre le problème

$$\min_u \sum_{t=0}^{3} \frac{1}{2}(x_t^2 + u_t^2) + \frac{1}{2}x_4^2$$

avec $x_t$ vérifiant la dynamique $x_{t+1} = x_t - u_t$ avec $x_0 = 1$

**Exercice 38.** Résoudre le problème

$$\max(x_1 + 4x_2 + 2x_3)$$

avec $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et $x_i \geq 0$

### 2.2 Calcul des variations

**Exercice 39.** Ecrire les équations d'Euler associées au problème suivant et en calculer les solutions :

$$J_1(x) = \int_0^1 2tx(t) - x^2(t) + 3x^2(t)x'(t)\ dt$$

et

$$J_2(x) = \int_0^1 t\sqrt{1 + (x'(t))^2}\ dt$$

**Exercice 40.** Même question pour les problèmes suivants, en tenant compte cette fois des conditions aux extrémités :

$$J_1(x) = \int_0^1 (x'(t))^2 + 12tx(t)\ dt \qquad \text{avec } x(0) = 2,\ x(1) = 3\ ,$$

$$J_2(x) = \int_0^1 x'(t)(1 + (1+t)^2 x'(t))dt \qquad \text{avec } x(0) = 3,\ x(1) = 2\ .$$

**Exercice 41.** On considère le problème

$$\inf_{x \in C^1([0,1]),\ x(0)=1,\ x(1)=0} \int_0^1 t\sqrt{1 + (x'(t))^2}dt\ .$$

(i) Vérifier que, pour tout $x \in C^1([0,1])$, $\int_0^1 t\sqrt{1 + (x'(t))^2}dt \geq 1/2$.
(ii) Montrer que l'infimum est égal à $1/2$ (on pourra calculer le critère pour les fonctions de la forme $x_n(t) = (1-t)^n$).
(iii) Montrer que le problème n'a pas de solution.

**Exercice 42.** On considère le problème de calcul des variations (sans condition terminale) :

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in X,\ x(0)=A} \int_0^1 L(t, x(t), x'(t))dt + g(x(1))\ ,$$

où $X$ est l'ensemble des fonctions de classe $C^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Les fonctions $L = L(t,x,p)$ et $g = g(x)$ sont supposés de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ respectivement. On suppose que $x$ est un minimum du problème.

(i) Montrer que, pour toute fonction $v : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ de classe $C^1$ avec $v(0) = 0$ on a

$$\int_0^1 \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t))v(t) + \frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t))v'(t)\ dt + g'(x(1))v(1) = 0.$$

(ii) Utiliser le lemme de Dubois-Raymond pour démontrer que $x$ vérifie l'équation d'Euler : la fonction $t \to \frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) \qquad \forall t \in [0,1]\,. \tag{1}$$

(iii) En déduire que, pour toute fonction $v : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ de classe $C^1$ avec $v(0) = 0$ on a

$$\left(\frac{\partial L}{\partial p}(1, x(1), x'(1)) + g'(x(1))\right) v(1) = 0$$

(iv) Montrer alors que $x$ vérifie la "condition de transversalité" :

$$\frac{\partial L}{\partial p}(1, x(1), x'(1)) + g'(x(1)) = 0.$$

(v) On admet que le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x\in X,\ x(0)=1} \int_0^1 (x'(t))^2 dt + (x(1))^2$$

admet un minimum. Le déterminer.

### 2.3 Contrôle optimal en temps continu

**Exercice 43** (Application du principe du maximum de Pontryagine)**.** En supposant que le problème admet une solution, trouver cette solution.

1. Soit $T > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ donnés. On considère le problème :

$$(P1) \qquad \inf_{u(\cdot)} \int_0^T u^2(s)\, ds + \frac{x^2(T)}{2}, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(t) = u(t),$$

où l'infimum est pris sur tous les contrôles mesurables et bornés $u : [0,T] \to \mathbb{R}$.

2. Pour $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ donnés, on s'intéresse au problème de contrôle optimal :

$$\inf\left\{\int_0^T e^{-s}u^2(s)ds + x(T), \qquad \text{où } x(0) = x,\ x'(t) = x(t) + u(t),\ u(t) \in \mathbb{R}\right\},$$

où l'infimum est pris sur tous les contrôles mesurables et bornés $u : [0,T] \to \mathbb{R}$.

3. Soit $T > 0$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $c = (c_1, c_2) \neq (0,0)$. On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\inf_{u\in\mathcal{U}}\{c_1y_1(T) + c_2y_2(T)\},$$

où $(y_1, y_2)$ est solution de

$$y_k'(t) = u_k(t), \quad y_k(0) = x_k, \quad k = 1,2, \quad t \in [0,T],$$

et $\mathcal{U}$ est l'ensemble de processus de contrôle à valeur $U := \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\ : u_1^2 + u_2^2 = 1\}$.

**Exercice 44.** On considère le problème de contrôle dans $\mathbb{R}$ :

$$V(t_0, x_0) := \inf_{u(\cdot)} g(x(T))$$

sous la contrainte que $u : [t_0, T] \to [-1, 1]$ est mesurable et que $x(\cdot)$ est l'unique solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est supposée continue.

1. Montrer qu'alors la fonction valeur du problème de contrôle est donnée par

$$V(t, x) = \min_{y \in [x-(T-t), x+(T-t)]} g(y) \qquad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

2. Montrer que $V$ est continue, mais pas forcément de classe $C^1$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.
3. On suppose que $g$ est convexe et de classe $C^1$. Montrer que $V$ est de classe $C^1$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ et vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\begin{cases} -\partial_t V(t, x) + \left|\frac{\partial V}{\partial x}(t, x)\right| = 0 & \text{dans}]0, T[\times \mathbb{R} \\ V(T, x) = g(x) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Exercice 45.** Calculer les fonctions valeur associées aux problèmes de contrôle optimal de l'exercice 43 et en déduire par un théorème de vérification la solution du problème.

**Exercice 46.** Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, on s'intéresse au problème de contrôle optimal :

$$\inf \left\{ \int_0^T u^2(s) ds + x(T), \text{ où } x(0) = x,\ \dot{x}(t) = x(t) + u(t),\ u(t) \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Calculer le Hamiltonien $H(t, x, p)$ du problème.
2. Utiliser le principe du maximum de Pontryagin pour trouver les solutions optimales.
3. Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi associée au problème et en donner une solution.
4. En déduire un feedback optimal pour le problème.
5. Résoudre le problème initial en utilisant le formalisme du calcul des variations.

**Exercice 47** (Lien entre l'équation de Hamilton-Jacobi et le principe du maximum)**.** On suppose que la fonction valeur $V$ est de classe $C^\infty$ et que $H$ est également de classe $C^\infty$. On considère la solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x^*(t), p^*(t)), & t \in [0, T] \\ p^*(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x^*(t)), & t \in [0, T] \\ x^*(0) = x_0 \end{cases}$$

Montrer que le couple $(x^*, p^*)$ vérifie le principe du maximum de Pontryagin.

**Exercice 48** (Problème en horizon infini)**.** Soit $\lambda > 0$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^N$ une condition initiale fixée, on considère le problème de contrôle optimal en horizon infini :

$$V(x_0) := \inf_{(x,u)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} L(x(t), u(t))\, dt$$

sous la contrainte que $u : [0, +\infty[ \to U$ est mesurable et que le couple $(x(\cdot), u(\cdot))$ vérifie l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & t \in [0, +\infty[ \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On définit le *Hamiltonien du système* $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par

$$H(x,p) := \sup_{u \in U} \{-\langle p, f(x,u)\rangle - L(x,u)\}.$$

L'application $L : \mathbb{R}^N \times U \to \mathbb{R}$ est supposée continue et bornée et $f$ vérifie les conditions habituelles.

1. Montrer que $V$ satisfait le principe de programmation dynamique : pour tout $t \geq 0$,

$$V(x_0) = \inf_{(x,u)} \int_0^t e^{-\lambda s} L(x(s), u(s))\, ds + e^{-\lambda t} V(x(t))$$

2. On suppose que $V$ est de classe $C^1$. Montrer que $V$ est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\lambda V(x) + H(x, \frac{\partial V}{\partial x}(x)) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

3. Inversement, on suppose qu'il existe une fonction $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, de classe $C^1$ et *bornée*, vérifiant

$$\lambda W(x) + H(x, \frac{\partial W}{\partial x}) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

   On suppose de plus qu'il existe un feedback $\tilde{u}^* : \mathbb{R}^N \to U$ continu tel que

$$-\langle \frac{\partial W}{\partial x}, f(x, \tilde{u}^*(x))\rangle - L(x, \tilde{u}^*(x)) = H(x, \frac{\partial W}{\partial x}), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

   Montrer alors que $W = V$ et que $\tilde{u}^*$ est un feedback optimal.

# 3 Solution de quelques exercices

Certains exercices sont un peu calculatoires et, faute de temps, ne seront pas traités en TD. Les solutions ci-dessous ont pour objectif d'aider le lecteur à s'entraîner à ces calculs.

Solution de l'exercice 8 : Après calcul, les candidats pour être solution du problème sont, d'une part, le point non qualifié $(1,0)$ et, d'autre part, le point vérifiant les conditions nécessaires $(0,1)$. L'objectif étant strictement meilleur en $(1,0)$ qu'en $(0,1)$, le maximum est atteint en $(1,0)$, et vaut 3.

Solution de l'exercice 10 : On trouve $x = y - [d - c^T y]c/\|c\|^2$.

Solution de l'exercice 11 : La contrainte est affine donc qualifiée en tout point. Le point $(0,0,1/3,2/3)$ est un point de maximum si et seulement si $r = q = 0$ et $p \leq -1$.

Solution de l'exercice 12 : 1) La contrainte est fermée et l'objectif est coercif. Il y a donc une solution. De plus, les contraintes sont convexes et l'objectif strictement convexe, donc la solutions est unique et la condition nécessaire d'optimalité est suffisante. Enfin, les contraintes sont affines donc qualifiées en tout point. Le point $(3/4,1/4,1/4)$ vérifie les conditions nécessaires d'optimalité et est donc l'unique solution.
2) La contrainte est compacte et le critère continu, le problème a donc une solution. Après calculs, on montre que celle-ci est unique : $x = y = -1/2$, et une valeur de $1/4 - 1/2 = -1/4$.

Solution de l'exercice 13 : L'objectif est continu et la contrainte compacte. Il y a donc au moins une solution. Les solutions sont les points tels que :

- si $u > 0$ ou $u \leq -1$ : $x = y = 0 \leq z \leq 1$. Valeur nulle.
- si $u = 0$ : $x = 0 \leq y \leq z \leq 1 - y$. Valeur nulle.
- si $-1 < u < 0$ : $x = \frac{a}{2(1+2a)}$, $y = x$ et $z = 1 - 2x$, où $a = -(u + u^2)$. Valeur : $-\frac{a^2}{4(1+2a)}$.

Solution de l'exercice 14 : On trouve comme points vérifiants les CNO : $(0,0)$, $(-1/2,-1/2)$ et $(-3/2,-3/2)$, qui sont bien dans $K$, avec des valeurs de l'objectif associées de 0, $-1/4$ et $3/4$. Cependant, le problème n'a pas de solution car, si on prend $y = -1$ et $x \geq 2$, le couple $(x,y)$ vérifie la contrainte, avec un critère $x^2 - 1$ arbitrairement grand lorsque $x \to +\infty$.

Solution de l'exercice 15 : la solution est $(1,0,0)$.

Solution de l'exercice 16 : La valeur est 2, obtenue en $(1,1)$ et en $(1,-1)$.

**Partiel du 26 Mars 2015**
**"Optimisation et programmation dynamique"**

Master mention Mathématiques appliquées 1ère année
Université Paris Dauphine

Dans tout le partiel, on note $\Pi_K(x)$ la projection orthogonale d'un point $x$ de $\mathbb{R}^n$ sur un convexe fermé non vide $K$ de $\mathbb{R}^n$. Si $y = (y_i)_{i=1,\dots,m}$ et $z = (z_i)_{i=1,\dots,m}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$, on écrit $y \le z$, si et seulement si, $y_i \le z_i$ pour tout $i = 1, \dots, m$.

**Exercice 1.** On cherche à résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{(x,y,z)\in K} x^2+y^2+z^2 \qquad \text{où} \qquad K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1 \text{ et } x^2+y^2\le 1\}\ .$$

1. Montrer que le problème admet une unique solution.
2. Montrer que la contrainte est qualifiée en tout point.
3. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème et en déduire la solution du problème $(\mathcal{P})$.
4. Retrouver la solution du problème $(\mathcal{P})$ par la méthode de dualité.

**Exercice 2.** Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $C$ une matrice réelle de taille $m \times n$ et $d \in \mathbb{R}^m$. On suppose que l'ensemble $K := \{x \in \mathbb{R}^n,\ Cx \le d\}$ est non vide.

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $y = \Pi_K(x)$, si et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ avec $\lambda \ge 0$, $y - x + C^T\lambda = 0$ et $\lambda^T(Cy-d) = 0$ (où $C^T$ est la transposée de la matrice $C$).
(Indication : Ecrire les conditions nécessaires du problème d'optimisation satisfait par $\Pi(x)$).

**Exercice 3.** Soient $C_1$ et $C_2$ deux convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ d'intersection non vide. On suppose qu'on sait effectuer numériquement la projection $\Pi_{C_1}$ et $\Pi_{C_2}$ sur les ensembles $C_1$ et $C_2$. On cherche à trouver un point de $C_1 \cap C_2$.

Pour $\tau \in ]0,2[$ un paramètre fixé et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ une position initiale donnée, on définit l'algorithme

$$\begin{array}{l} x_0 = \bar{x} \\ x_{n+1/2} = x_n + \tau\left(\Pi_{C_1}(x_n) - x_n\right) \qquad (n\in\mathbb{N}) \\ x_{n+1} = x_{n+1/2} + \tau\left(\Pi_{C_2}(x_{n+1/2}) - x_{n+1/2}\right) \qquad (n\in\mathbb{N}) \end{array}$$

1. Montrer que, si $C$ est un convexe fermé non vide, $x \in C$ et $y \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\|y + \tau(\Pi_C(y) - y) - x\|^2 \le \|y-x\|^2 - \tau(2-\tau)\|\Pi_C(y) - y\|^2\ .$$

2. En déduire que, pour tout $x \in C_1 \cap C_2$, on a :

$$\|x_{n+1} - x\|^2 \le \|x_n - x\|^2 - \tau(2-\tau)\left(\left\|\Pi_{C_2}(x_{n+1/2}) - x_{n+1/2}\right\|^2 + \|\Pi_{C_1}(x_n) - x_n\|^2\right).$$

3. Montrer alors que, pour tout $x \in C_1 \cap C_2$, la suite $(\|x_n - x\|^2)$ converge et vérifier que la suite $(x_n)$ est bornée.
4. Montrer que toute valeur d'adhérence de la suite $(x_n)$ appartient à $C_1 \cap C_2$.

**Examen du 01/06/2015**
**"Optimisation et programmation dynamique"**

Master mention Mathématiques appliquées 1ère année
Université Paris Dauphine

**Exercice 1.** Pour un entier $T \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 = 1$, on considère le problème

$$\inf_{(x_{t+1},u_t)_{t=0,\dots,T-1}} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{2}\left(x_t^2 + u_t^2\right) + \frac{1}{2}x_T^2$$

sous contrainte $(x_{t+1}, u_t)_{t=0,\dots,T-1} \in \mathbb{R}^{2T}$ et

$$x_{t+1} = x_t + u_t \qquad \forall t \in \{0, \dots, T-1\}.$$

*Dans les questions 1 à 3, on considère le problème comme un problème d'optimisation sous contrainte. Dans la question 4, on le regarde comme un problème de contrôle optimal en temps discret.*

1. Montrer que le problème possède au moins une solution $(\bar{x}_{t+1}, \bar{u}_t)_{t=0,\dots,T-1} \in \mathbb{R}^{2T}$.
2. Montrer que cette solution est unique.
3. Justifier et énoncer les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème.
4. Pour $(t_0, x_0) \in \{0, \dots, T-1\} \times \mathbb{R}$ et $x_{t_0} = x_0$, on pose

$$V(t_0, x_0) = \min_{(x_{t+1},u_t)_{t=t_0,\dots,T-1}} \sum_{t=t_0}^{T-1} \frac{1}{2}\left(x_t^2 + u_t^2\right) + \frac{1}{2}x_T^2$$

sous contrainte $(x_{t+1}, u_t)_{t=t_0,\dots,T-1} \in \mathbb{R}^{T-t_0}$ et

$$x_{t+1} = x_t + u_t \qquad \forall t \in \{t_0, \dots, T-1\}.$$

(a) Montrer que, pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + V(t+1, x+u).$$

(b) En déduire par récurrence (décroissante) que, pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$, il existe $\alpha_t \in [1, +\infty[$ tel que

$$V(t, x) = \frac{1}{2}\alpha_t x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On montrera que $\alpha_{T-1} = 3/2$ et on donnera l'expression de $\alpha_t$ en fonction de $\alpha_{t+1}$ pour tout $t \in \{0, \dots, T-2\}$.

(c) Calculer la solution du problème pour $T = 2$.

**Exercice 2.** Soit $H^1$ l'espace de Sobolev $W^{1,2}([0,1], \mathbb{R})$ et $H_0^1$ l'ensemble des éléments $x$ de $H^1$ tels que $x(0) = x(1) = 0$. On rappelle que, si $x \in H_0^1$, alors la fonction $y(t) := \max\{0, x(t)\}$ appartient aussi à $H_0^1$ et vérifie, pour presque tout $t \in [0,1]$,

$$y'(t) = \begin{cases} x'(t) & \text{si } x(t) > 0 \\ 0 & \text{si } x(t) \leq 0 \end{cases}$$

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ *strictement décroissante avec* $h(0) = 0$. On définit $E$ comme étant l'ensemble des éléments $x \in H_0^1$ tels que $\int_0^1 \frac{1}{2}(x'(t))^2 dt = 1$.

On considère le problème

$$(P) \qquad \inf_{x \in E} J(x) \qquad \text{où } J(x) = \int_0^1 h(x(t))\, dt.$$

1. On suppose qu'il existe une solution $\bar{x}(\cdot)$ au problème $(P)$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.
   (a) Montrer que $\bar{x}$ n'est pas identiquement nulle.
   (b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\lambda \bar{x}''(t) = h'(\bar{x}(t)) \qquad \forall t \in [0, 1].$$
   (c) On suppose, *dans cette question seulement*, que $h(z) = -z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Calculer alors $\bar{x}$.
   (d) En utilisant le fait que $h$ est strictement décroissante et que $h(0) = 0$, montrer qu'il existe $x \in E$ avec $J(x) < 0$.
   (e) En déduire qu'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\bar{x}(t) > 0$.
   (f) Conclure que $\bar{x}$ est une fonction concave sur $[0, 1]$.
2. Soit $(x_n)$ une suite minimisante du problème $(P)$ :
   $$x_n \in E \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in E} J(x).$$
   (a) On pose $\tilde{x}_n(t) = \max\{0, x_n(t)\}$ et $\theta_n = \int_0^1 \frac{1}{2}(\tilde{x}_n'(t))^2 dt$. Montrer, en utilisant la question 1.(d), qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\theta_n \in ]0, 1]$ pour tout $n \geq n_0$.
   (b) On pose alors $y_n(t) = \theta_n^{-1/2} \tilde{x}_n(t)$. Montrer que $(y_n)$ est encore une suite minimisante pour le problème $(P)$.

   On rappelle un résultat de cours qui affirme qu'il existe une sous-suite $(y_{n_k})$ et $y \in H_0^1$ tels que la suite $(y'_{n_k})$ tend faiblement vers $y'$ dans $L^2([0, 1])$ et la suite $(y_{n_k})$ converge uniformément vers $y$ sur $[0, 1]$.
   (c) Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{2}(y'(t))^2 dt \leq 1$.
   (d) Montrer qu'en fait $\int_0^1 \frac{1}{2}(y'(t))^2 dt = 1$.
   (difficile : on pourra raisonner par l'absurde, puis s'inspirer de la question 2-(b)).
   (e) Conclure à l'existence d'une solution au problème $(P)$.

**Barème indicatif :** Ex. 1 : 10 pts, Ex. 2-1 : 10 pts, Ex. 2-2 : 10 pts.

Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

**Partiel du 14 mars 2016**
**"Optimisation et programmation dynamique"**
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

**Exercice 1.** Soit $A$ une matrice réelle de format $n \times n$ et $C$ une matrice réelle de format $m \times n$. On suppose que $A$ est symétrique et *semi-définie positive*. Soit $d \in \mathbb{R}^m$. On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{x\in K} x^T Ax \qquad \text{où } K := \big\{x \in \mathbb{R}^n,\ Cx = d\big\}.$$

1. Soit $(x_k)$ une suite de $\mathbb{R}^n$ telle que $\|x_k\| \to +\infty$. On suppose qu'il existe une constante $\Lambda$ telle que $x_k^T Ax_k \le \Lambda$ et $Cx_k = d$. Montrer que la suite $(v_k := x_k/\|x_k\|)$ possède une sous-suite qui converge vers un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $v \neq 0$, $Av = 0$ et $Cv = 0$.

   On suppose, à partir de maintenant, que $Ker(A) \cap Ker(C) = \{0\}$ et que l'ensemble $K$ est non vide.

2. Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution.

3. Montrer que cette solution est en fait unique.
   (Question plus délicate : on pourra raisonner par l'absurde en montrant que, si $x_1$ et $x_2$ sont deux solutions, alors $x_2 - x_1$ est dans $Ker(A) \cap Ker(C)$).

4. Dans cette question, on suppose que $n = 3$, $m = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Vérifier que le problème possède une unique solution et trouver cette solution par dualité (on justifiera soigneusement cette approche).

**Exercice 2.** Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $C^1$. On suppose que *la fonction $f$ est minorée* et on pose

$$m := \inf_{x\in\mathbb{R}^n} g(x) \qquad (\text{noter que } m \in [-\infty, +\infty[).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $t > m$, on pose :

$$K(t) := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) \le t\} \qquad \text{et} \qquad v(t) := \inf_{x\in K(t)} f(x).$$

On note $(\mathcal{P}(t))$ le problème $\inf_{x\in K(t)} f(x)$.

1. *Dans cette question seulement,* on suppose que $n = 2$, $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^2 + 2y^2$. Calculer $m$ et $v(t)$ pour tout $t > m$.

2. Montrer que la fonction $v$ est décroissante sur $]m, \infty[$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que $f$ et $g$ sont convexes sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $v$ est convexe sur $]m, \infty[$.

   A partir de maintenant on suppose que $f$ est coercive :
   $$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
   On suppose aussi que, pour tout $t > m$, la contrainte $K(t) := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) \leq t\}$ est qualifiée.

4. Soit $t > m$. Montrer que le problème $(\mathcal{P}(t))$ admet au moins un minimum $x_t \in K(t)$ et écrire les conditions nécessaires d'optimalité pour un tel minimum (on appellera $\lambda_t$ un multiplicateur associé).

5. On suppose, dans cette question, que $v$ est dérivable en un point $t > m$. Soient $x_t$ et $\lambda_t$ comme dans la question précédente. On supposera que $\lambda_t > 0$.

   (a) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla g(x_t), v \rangle < 1$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $h \in ]0, \epsilon[$, $x_t + hv$ appartient à $K(t + h)$. En déduire que $v'(t) \leq \langle \nabla f(x_t), v \rangle$.

   (b) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla g(x_t), v \rangle > 1$. Montrer de façon symétrique que $v'(t) \geq \langle \nabla f(x_t), v \rangle$.

   (c) En déduire que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla g(x_t), v \rangle = 1$, on a $v'(t) = \langle \nabla f(x_t), v \rangle$.

   (d) Conclure que $v'(t) = -\lambda_t$.

**Barême indicatif :** Exercice 1 = 10 points, Exercice 2 = 15 points.

Université Paris Dauphine
Master 1, MMD-MA

**Examen du Mai 2017**
**"Optimisation et programmation dynamique"**
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés sauf une fiche A4

**Exercice 1.** Un agent possède une richesse initiale $x_0 \in \mathbb{R}_+$ à l'instant 0, il consomme en temps continu avec le taux $c(t) > 0$ en $[0, T]$, où $T = 1$. Soit $x(t)$ sa richesse à l'instant $t$, on a alors $x'(t) = -c(t)$, où $x'(t)$ est la dérivée de la fonction $x(t)$. Dans le cours, un problème de consommation optimale est formulé comme :

$$\sup \Big\{ \int_0^1 e^{-\beta t} u(-x'(t)) dt \ : x \in C^1([0,1], \mathbb{R}),\ x(0) = x_0,\ x(1) = 0 \Big\},$$

où $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité. Supposons que le problème admet une solution optimale $x_*$ t.q. $-x_*'(t) > 0$, $t \in [0,1]$.

1. En utilisant le résultat du calcul des variations, donner la condition nécessaire (Equation d'Euler) satisfaite par $x_*$.
2. Supposons que $u(z) := z^\gamma/\gamma$ avec une constant $\gamma \in (0,1)$, montrer que la condition nécessaire dans la question précédente est équivalente à

$$(1-\gamma)x_*''(t) + \beta x_*'(t) = 0.$$

3. Déterminer $x_*(t)$ en résolvant l'EDO ci-dessus avec les conditions aux bords $x_*(0) = x_0$ et $x_*(1) = 0$.

**Exercice 2.** Soit $T > 0$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $c = (c_1, c_2) \neq (0,0)$. On considère le problème de maximisation suivant :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \{c_1 y_1(T) + c_2 y_2(T)\},$$

où $(y_1, y_2)$ est solution de

$$y_k'(t) = u_k(t), \quad y_k(0) = x_k, \quad k = 1,2, \quad t \in [0,T],$$

et $\mathcal{U}$ est l'ensemble de processus de contrôle à valeur $U := \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \ : u_1^2 + u_2^2 = 1\}$.

1. a) Donner le pré-Hamiltonien du problème $\underline{H}(t, x, p, u)$.
   b) Montrer que si $p \neq 0$, le Hamiltonien est donné par

$$H(t,x,p) = \underline{H}(t,x,p,-\frac{p}{|p|}), \quad \text{avec } \ |p| := \sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

   c) Donner les conditions nécessaires d'optimalité dans le principe de Pontryagin.
   d) Déterminer la solution $(y^*, p^*) = ((y_1^*, y_2^*), (p_1^*, p_2^*))$ en résolvant le système issu des conditions nécessaires ci-dessus.
   e) Calculer le contrôle associé $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, et la valeur $J(u^*) := c_1 y_1^*(T) + c_2 y_2^*(T)$ associée.

2. a) Enoncer le principe de la programmation dynamique pour ce problème de contrôle optimal.
   b) Enoncer l'équation HJB pour le problème de contrôle optimal.
   c) Déterminer une solution de l'équation HJB.
   d) Calculer un contrôle optimal "feedback".
   e) En déduire que $(u_1^*, u_2^*)$ trouvé par le principe de Pontryaguin est un contrôle optimal.

**Exercice 3.** On considère un problème de finance en temps discret $t = 0, 1$. A l'instant $t = 0$, le prix d'un actif $S_0 = s_0$ est une constante fixée. A l'instant $t = 1$, le prix $S_1$ de l'actif a $n$ possibilités de valeur $x_1, \cdots, x_n$, i.e. $S_1 \in \{x_1, \cdots, x_n\}$. Supposons que

$$n \geq 2 \quad \text{et} \quad x_1 \leq s_0 \leq x_n.$$

Un modèle financier est une distribution de $S_1$ sous laquelle son espérance vaut $S_0$. Notons

$$\mathcal{M} \ := \ \Big\{(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n \ : \sum_{k=1}^n p_k = 1 \ \text{ et } \ \sum_{k=1}^n x_k p_k = s_0\Big\}.$$

Soit $g : \{x_1, \cdots, x_n\} \to \mathbb{R}$ la fonction payoff d'une option dérivée, on considère deux problèmes financiers : le problème primal $P$ est la valeur maximale d'espérance du payoff $g(S_1)$ sous tous les modèles (ou toutes les distributions de $S_1$), i.e.

$$P \ = \ \sup_{(p_1,\cdots,p_n)\in\mathcal{M}} \ \sum_{k=1}^n g(x_k) p_k;$$

le problème dual est le coût minimal qui permet de sur-répliquer l'option $g(S_1)$ par une stratégie de trading sur $(S_0, S_1)$, i.e.

$$D \ = \inf_{(y,H)\in\mathcal{D}} y, \ \text{ où } \ \mathcal{D} := \big\{(y, H) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : y + H(x_k - s_0) \geq g(x_k), \ \forall k = 1, \cdots, n\big\}.$$

Montrer la dualité $P = D$ et qu'il existe une solution $(p_1^*, \cdots, p_n^*)$ et $(y^*, H^*)$ pour les deux problèmes d'optimisation $P$ et $D$.

**Barême indicatif :** Exercice 1 : 6 points, Exercice 2 : 10 points. Exercice 3 : 4 points.

Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

**Partiel du 29/10/2019**
**"Optimisation et programmation dynamique"**
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

**Exercice 1.** On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{\substack{-x^2 \le y \le 0 \\ -1 \le x \le 0}} \quad x - 2y$$

1. Montrer que le problème admet au moins une solution.
2. Dessiner la contrainte $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -x^2 \le y \le 0, \ \ -1 \le x \le 0\}$.
3. Montrer que, tout point $(x,y) \in K$ avec $(x,y) \neq (0,0)$, la contrainte est qualifiée en $(x,y)$.
4. Trouver l'ensemble des points vérifiants les conditions nécessaires d'optimalité.
5. Déterminer la ou les solutions du problème.

**Exercice 2.** On considère le problème de programmation linéaire

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in K} \langle a, x \rangle$$

où $a \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{J \times n}$, $d \in \mathbb{R}^J$ ($n$ et $J$ sont des entiers non nuls) et où

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n, \ \ Cx = d \qquad \text{et} \qquad x_i \ge 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

On suppose que $K$ est non vide et que le problème $(\mathcal{P})$ admet un minimum. On admettra l'égalité [1] :

$$\inf_{x \in K} \langle a, x \rangle = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^n_+, \, \mu \in \mathbb{R}^J} \ \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \ \{\langle a, x \rangle - \langle \lambda, x \rangle + \langle \mu, (Cx - d) \rangle\}. \tag{2}$$

1. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème.
2. En utilisant l'égalité (2), démontrer que

   $$\inf_{x \in K} \langle a, x \rangle = - \inf_{\mu \in \tilde{K}} \langle d, \mu \rangle$$

   où

   $$\tilde{K} := \{\mu \in \mathbb{R}^J, \ (C^T \mu)_j + a_j \ge 0, \ \forall j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

3. On suppose que $x \in K$ et $\mu \in \tilde{K}$. Montrer que $\langle a, x \rangle + \langle d, \mu \rangle \ge 0$.
4. Soit $x^*$ un point de minimum du problème $(\mathcal{P})$ et $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^d_+ \times \mathbb{R}^J$ les multiplicateurs associés dans les conditions nécessaires d'optimalité de $x^*$. Montrer que $\mu^*$ est un point de minimum du problème

   $$(\tilde{\mathcal{P}}) \qquad \inf_{\mu \in \tilde{K}} \langle d, \mu \rangle.$$

1. Cette égalité de dualité a été prouvée dans le cours dans un contexte un tout petit peu différent.

5. On suppose que $x^*$ est un point de minimum de $(\mathcal{P})$ et $\mu^*$ est une solution de $(\tilde{\mathcal{P}})$. Montrer alors que $\langle a, x^* \rangle + \langle d, \mu^* \rangle = 0$.

**Exercice 3.** Soit $A$ une matrice carrée $d \times d$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^d$, $C \in \mathbb{R}^{J \times d}$, $d \in \mathbb{R}^J$ (comme toujours, les vecteurs sont assimilés à des matrices colonnes). Dans toute la suite, $\| \cdot \|$ désigne à la fois les normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^d$ et sur $\mathbb{R}^J$, et les normes matricielles associées.

On cherche à résoudre

$$\min_{Cx=d} \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle.$$

On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $Cx = d$.

1. Montrer que le problème admet un unique point de minimum noté $x^*$.
2. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité. On notera $\mu^* \in \mathbb{R}^J$ un lagrangien associé au problème.

   On cherche à résoudre numériquement le problème. Etant donnés des pas $\tau_1 > 0$ et $\tau_2 > 0$ et des conditions initiales $x^0 \in \mathbb{R}^d$ et $\mu^0 \in \mathbb{R}^J$, on définit par récurrence la suite

$$\begin{cases} x^{n+1} = x^n - \tau_1 (Ax^n + b + C^T \mu^n) \\ \mu^{n+1} = \mu^n + \tau_1 \tau_2 (Cx^{n+1} - d) \end{cases}$$

3. Montrer que l'on peut choisir $\tau_1 > 0$ suffisamment petit pour que $\|I_d - \tau_1 A\| < 1$ (où $I_d$ est la matrice identité de format $d$). On fera ce choix par la suite et on posera alors $\beta := \|I_d - \tau_1 A\|$.
4. En utilisant le fait que $x^*$ vérifie les contraintes, montrer que l'on a

$$\left\| \mu^{n+1} - \mu^* \right\|^2 \leq \|\mu^n - \mu^*\|^2 + 2\tau_1\tau_2 \langle (\mu^n - \mu^*), C(x^{n+1} - x^*) \rangle + (\tau_1\tau_2)^2 \|C^T C\| \|x^{n+1} - x^*\|^2.$$

5. En utilisant les conditions d'optimalité et la définition de $x^{n+1}$, vérifier que

$$\tau_1 C^T (\mu^n - \mu^*) = -(x^{n+1} - x^*) + (I_d - \tau_1 A)(x^n - x^*).$$

6. En déduire que

$$\gamma \|x^{n+1} - x^*\|^2 \leq \left( \frac{\|\mu^n - \mu^*\|^2}{\tau_2} + \beta \|x^n - x^*\|^2 \right) - \left( \frac{\|\mu^{n+1} - \mu^*\|^2}{\tau_2} + \beta \|x^{n+1} - x^*\|^2 \right)$$

   où $\gamma := (2 - \tau_1^2 \tau_2 \|C^T C\| - 2\beta)$ sera supposé strictement positif (grâce au fait que $\beta \in ]0,1[$ et à un choix judicieux de $\tau_2$).
7. En déduire que $(x^n)$ converge vers $x^*$.
8. Quel est la différence entre cet algorithme et l'algorithme d'Uzawa ?

**Barême indicatif :** Exercice 1 = 7 points, Exercice 2 = 6 points, Exercice 3 = 8 points.

Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

**Examen du 15/01/2020**
**"Optimisation et programmation dynamique"**
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

**Exercice 1.** Dans cet exercice, on résout de deux façons différentes le même problème. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère le problème suivant (dans $\mathbb{R}^N$) :

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{N} (1-x_i)^2 \text{ sous contraintes } \sum_{i=1}^{N} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ \forall i = 1, \dots, N \right\}$$

   (a) Montrer que le problème possède une et une seule solution.
   (b) Expliquer pourquoi la contrainte est qualifiée en tout point.
   (c) Soit $(x_1, \dots, x_N)$ un minimum du problème. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité.
   (d) En utilisant le fait qu'il existe une seule solution au problème, calculer cette solution.

2. Pour $y \geq 0$ et $N \geq 1$, on considère maintenant le problème

$$V_N(y) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{N} (1-x_i)^2, \text{ sous contraintes } \sum_{i=1}^{N} x_i = y,\ x_i \geq 0\ \forall i = 1 \dots, N \right\}.$$

   (a) En s'inspirant du principe de programmation dynamique, écrire une relation de récurrence entre $V_N$ et $V_{N-1}$ pour $N \geq 2$ (on ne demande pas de justification).
   (b) En déduire $V_N(y)$ pour tout $y \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 2.** Pour $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ donnés, on s'intéresse au problème de contrôle optimal :

$$\inf \left\{ \int_0^T e^{-s} u^2(s) ds + x(T), \qquad \text{où } x(0) = x,\ x'(t) = x(t) + u(t),\ u(t) \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Calculer le Hamiltonien $H(t, x, p)$ du problème.
2. Trouver tous les couples $(x(\cdot), u(\cdot))$ vérifiant le principe du maximum de Pontryagin.

**Exercice 3.** On se donne $A, B \in \mathbb{R}$ et $L : [0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (on écrira $L = L(t, x, p)$). On considère le problème de calcul des variations

$$\min \left\{ \int_0^t L(s, x(s), x'(s)) ds,\ \text{où } t > 0,\ x \in \mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R}),\ x(0) = A,\ x(t) = B \right\},$$

*(attention ! bien noter que l'on minimise sur $x$ et sur $t$).* On rappelle que, si $t > 0$ est fixé, l'application $f_t : \mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_t(x) = \int_0^t L(s, x(s), x'(s))ds \qquad \forall x \in \mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R})$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R})$ avec

$$df_t(x)(w) = \int_0^t \left( \frac{\partial L}{\partial x}(s, x(s), x'(s))w(s) + \frac{\partial L}{\partial p}(s, x(s), x'(s))w'(s) \right) ds, \qquad \forall x, w \in \mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R}).$$

On suppose que le couple $(T, x) \in ]0, +\infty[\times\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$ est un point de minimum du problème.

1. Expliquer pourquoi $x$ vérifie la condition d'Euler

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial p}(s, x(s), x'(s)) = \frac{\partial L}{\partial x}(s, x(s), x'(s)) \qquad \forall s \in [0,T].$$

2. On définit $\tilde{x}(s)$ sur $[0, T+1]$ par $\tilde{x}(s) = x(s)$ si $s \in [0,T]$ et $\tilde{x}(s) = x(T) + (s-T)x'(T)$ sur $[T, T+1]$. Pour $w \in \mathcal{C}^1([0,T+1],\mathbb{R})$ avec $w(0) = 0$, on définit l'application $\Phi : ]0, T+1[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ par

$$\Phi(t,\lambda) = \left( \int_0^t L(s, \tilde{x}(s) + \lambda w(s), \tilde{x}'(s) + \lambda w'(s))ds, \tilde{x}(t) + \lambda w(t) \right).$$

   On admettra que $\Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Exprimer $\Phi(T,0)$ et la différentielle $d\Phi(T,0)$ de $\Phi$ en $(T,0)$ en fonction de $T$, $B$, $L$, $x$ et $w$ et de leurs dérivées.

3. Montrer que $d\Phi(T,0)$ ne peut pas être inversible (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème d'inversion locale pour contredire l'optimalité de $(T,x)$)

4. En utilisant l'équation d'Euler vérifiée par $x$, déduire de la question précédente que

$$L(T, x(T), x'(T)) = \frac{\partial L}{\partial p}(T, x(T), x'(T))x'(T).$$

5. (Application) On considère le problème

$$\min\left\{ \int_0^t (\frac{1}{2}(x'(s))^2 + 1)ds, \text{ où } t > 0, \ x \in \mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R}), \ x(0) = 0, \ x(t) = 1 \right\},$$

   et admet un point de minimum $(T, x) \in ]0, +\infty[\times\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$. En utilisant les questions 1 et 4, déterminer le couple $(T, x)$.

**Barème indicatif :** Exercice 1 = 8 points, Exercice 2 = 4 points, Exercice 3 = 8 points.