Exercices sur le cours "Optimisation et programmation dynamique"

2015-2016
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année
Université Paris Dauphine

1 Optimisation

1.1 Le théorème de Kuhn et Tucker

Exercice 1. On considère le problème

$$\max_{g(x)\leq 0} f(x)$$

Montrer que, si x est un maximum du problème et la contrainte est qualifiée en x, alors il existe $\lambda \leq 0$ tel que

$$\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0 \ .$$

Exercice 2. On considère le problème de la boite

$$\min_{\substack{x_i \geq 0 \\ x_1x_2x_3 = 2}} \quad (x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3)$$

1. On suppose que le problème admet une solution. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité et calculer cette solution.
2. (difficile) Montrer que le problème admet bien une solution

Exercice 3. On considère problème

$$\max_{x^3+y^3-3xy+1=0} (x+y)$$

Calculer la solution de ce problème (on admet l'existence d'un maximum).

Exercice 4. On considère le problème

$$\max_{\substack{0 \leq x_i \leq 42 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 72}} \quad (x_1 + x_2)$$

Calculer la solution de ce problème.

Exercice 5. On considère le problème

$$\max_{\substack{0 \leq x \\ 0 \leq y \leq (1-x)^3}} \quad (3x + y)$$

1. Montrer que le point $(0, 1)$ est le seul point vérifiant les conditions nécessaires.

2. Montrer que le point $(1,0)$ est le minimum du problème.

Exercice 6. Soit A une matrice symétrique de format $n \times n$.

1. Montrer que
$$m = \min_{\|x\|=1} \frac{1}{2} x^T A x$$
est la plus petite valeur propre de A.
2. Soient $\{v_i\}_{i=1,\ldots,k}$ une famille de vecteurs propres de A, deux à deux orthogonaux. Montrer que la quantité
$$\begin{array}{cc} \min & \frac{1}{2} x^T A x \\ \|x\| = 1, & \\ v_i^T x = 0, ; \forall i = 1, \ldots, k & \end{array}$$
est une valeur propre de A.

Exercice 7. Soit P l'hyperplan de $\mathbb{R}^N$ d'équation $c^T x = d$ (où $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$). Calculer la projection orthogonale d'un point y de $\mathbb{R}^n$ sur P, c'est-à-dire le minimum du problème
$$\min_{c^T x = d} \frac{1}{2} \|x - y\|^2$$

Exercice 8. Quelles conditions doivent vérifier les réels p, q, r pour que la fonction linéaire $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to x_1 + p x_2 + q x_3 + r x_4$ atteigne son maximum sous les contraintes $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ au point $(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$?

Exercice 9. Les problèmes suivants ont-ils a priori une unique solution ? La (les) calculer.
$$\begin{array}{cc} \min & x^2 + y^2 + 2z^2 \\ x + y \geq 1 & \\ x + 2y + z \geq 0 & \\ y \leq z & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \min & x^2 + y \\ y \leq 0 & \\ y \geq x & \\ x + y + 3 \geq 0 & \end{array}$$

Exercice 10. Calculer, en fonction du paramètre $u \in \mathbb{R}$, la solution du problème
$$\begin{array}{cc} \min & (xy + uxz + u^2 yz) \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \leq z \\ x + y + z \leq 1 \end{array} \right. & \end{array}$$

Exercice 11. Calculer les solution des problèmes
$$\min_{x^2 + y^3 + 1 \leq 0} y^2 - x^2 \qquad \begin{array}{cc} \max & x^2 + y \\ \left\{ \begin{array}{l} y \leq 0, \ y \leq x \\ x + y + 3 \geq 0 \end{array} \right. & \end{array}$$

Exercice 12. Soient M la matrice
$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et S l'ensemble convexe
$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1, \ x_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3\}$$

Montrer que le problème
$$\max_{X \in S} X^T M X$$

admet une unique solution. La calculer.

Ind. L'inverse de M est $M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. Calculer, pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ la valeur du problème

$$(\mathcal{P}_{a,b}) \qquad \min_{\substack{0 \leq x_2 \leq (1-x_1)^2 \\ 0 \leq x_1}} \quad ax_1 + bx_2$$

Exercice 14. On cherche à résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{(x,y)\in K} (x-2)^2 + y^2 \qquad \text{où} \qquad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}\ .$$

1. Montrer que le problème admet au moins une solution.
2. Montrer que la contrainte est qualifiée en tout point.
3. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème.
4. Trouver tous les points satisfaisant les conditions nécessaires d'optimalité.
5. En déduire la (ou les) solution(s) du problème $(\mathcal{P})$.

1.2 Dualité

Exercice 15. Résoudre par dualité le problème

$$\min_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ y+z \leq 0}} \quad \frac{1}{2}\left[(x-2)^2 + y^2 + z^2\right]$$

Exercice 16. Calculer le problème dual de

$$\min_{\substack{-\log(x) - y \leq 0 \\ y \geq 1}} \quad x + \frac{1}{2}y^2$$

Exercice 17. Résoudre par dualité le problème

$$\min_{\frac{1}{2}x^TAx\leq 1} c^Tx$$

où A est une matrice symétrique définie positive de format $n \times n$, et c un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 18. On s'intéresse au problème

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{Cx\leq d} \frac{1}{2}x^TAx + b^Tx$$

où A est une matrice $n \times n$ définie positive, b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, C est une matrice de format $l \times n$ et d est un vecteur de $\mathbb{R}^l$. L'expression $Cx \leq d$ signifie que toute composante de Cx est inférieure ou égale à la composante correspondante de d. Montrer que le problème dual du problème $(\mathcal{P})$ est le problème suivant

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}^l_+} -\frac{1}{2}\lambda^TCA^{-1}C^T\lambda - (b^TA^{-1}C^T + d^T)\lambda$$

Exercice 19. On considère a_i ($i = 1, \ldots, n$) des réels strictement positifs, et x tel que $\sum_{i=1}^n x_i^2/a_i^2 > 1$, c'est-à-dire que x n'appartient pas à l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2/a_i^2 \leq 1\}$$

Calculer le problème dual $d(\lambda)$ du problème

$$\min_{u \in \mathcal{E}} \|u - x\|^2$$

Montrer que le maximum de $d(\lambda)$ vérifie

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2 + \lambda)^2} = 1 \, .$$

Exercice 20. Résoudre par dualité le problème

$$\min_{\langle s,x\rangle \leq 0} \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle c, x\rangle$$

où s et c sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ non nuls.

Exercice 21. On considère le problème

$$\min_{Ax=b} \frac{1}{2}\|x\|^2$$

où A est une matrice $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

1. Quelle est la signification géométrique de ce problème.
2. Calculer le problème dual $(\mathcal{D})$.
3. A quelle condition le problème dual admet-il une unique solution ?
4. Calculer dans ce cas cette solution en fonction de A et b.

1.3 Méthodes numériques

Exercice 22. On considère le problème

$$\min_{g(x) \leq 0} f(x)$$

où f et g sont des fonctions régulières de classe $\mathcal{C}^2$. Le problème dual associé est

$$(\mathcal{D}) \quad \max_{\lambda \geq 0} d(\lambda)$$

où

$$d(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda g(x)$$

Enoncer des conditions sur $\rho > 0$ garantissant la convergence de l'algorithme d'Uzawa :

- on initialise avec un $\lambda^0 \in \mathbb{R}_+^l$

– à l'étape k, (i) on résoud le problème (sans contrainte)

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)+\lambda^k g(x)$$

Soit x^k une solution de ce problème, (ii) on remet à jour λ^k en posant $\lambda^{k+1}=\max\{\lambda^k+\rho g(x^k),0\}$

On pourra remarquer que l'algorithme n'est rien d'autre que le gradient projeté pour la fonction d et s'inspirer des résultats pour cet algorithme.

Exercice 23 (Méthode de pénalisation intérieure)**.** Soient $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$, strictement convexes avec g coercive. On suppose qu'il existe un point x_0 tel que $g(x_0)<0$.

1. Montrer que le problème sous contrainte

$$\min_{x\in K} f(x) \qquad \text{où } K:=\{x\in\mathbb{R}^d\ :\ g(x)\le 0\}$$

possède une unique solution $\bar{x}$.

L'objectif du problème est d'approcher $\bar{x}$ par une méthode de pénalisation. Pour tout $\epsilon>0$, on pose

$$J_\epsilon(x):=f(x)-\frac{\epsilon}{g(x)} \qquad \forall x\in Int(K)=\{x\in\mathbb{R}^d\ :\ g(x)<0\}.$$

2. Montrer que J_ϵ possède un unique minimum x_ϵ dans $Int(K)$.
3. Soit $x\in Int(K)$. Vérifiez que $J_\epsilon(x)\ge J_\epsilon(x_\epsilon)\ge f(x_\epsilon)$. En déduire que, si $\tilde{x}$ est une valeur d'adhérence de (x_ϵ) lorsque $\epsilon\to 0$, alors $f(x)\ge f(\tilde{x})$.
4. Conclure que (x_ϵ) tend vers $\bar{x}$ lorsque $\epsilon\to 0$.
5. On suppose que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$. Ecrire la condition d'optimalité pour x_ϵ et redémontrer l'existence d'un multiplicateur $\lambda\ge 0$ pour $\bar{x}$.
6. Suggérer une méthode numérique d'approximation de $\bar{x}$.

Exercice 24 (Méthode de pénalisation extérieure)**.** Soient $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$, strictement convexes avec f coercive. On note $\bar{x}$ l'unique solution du problème sous contrainte

$$\min_{x\in K} f(x) \qquad \text{où } K:=\{x\in\mathbb{R}^d\ :\ g(x)\le 0\}$$

L'objectif du problème est d'approcher $\bar{x}$ par une méthode de pénalisation extérieure. Pour tout $\epsilon>0$, on pose

$$J_\epsilon(x):=f(x)+\frac{1}{\epsilon}\left(\max\{0,g(x)\}\right)^2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}^d.$$

1. Montrer que J_ϵ possède un unique minimum x_ϵ dans $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que la famille (x_ϵ) est bornée pour $\epsilon\in(0,1)$.
3. Soit $x\in K$. Vérifiez que $J_\epsilon(x)\ge J_\epsilon(x_\epsilon)\ge f(x_\epsilon)$. En déduire que, si $\tilde{x}$ est une valeur d'adhérence de (x_ϵ) lorsque $\epsilon\to 0$, alors $f(x)\ge f(\tilde{x})$.
4. Conclure que (x_ϵ) tend vers $\bar{x}$ lorsque $\epsilon\to 0$.
5. On suppose que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$. Vérifier que J_ϵ est de classe C^1 et suggérer une méthode numérique d'approximation de $\bar{x}$.

6. On suppose que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et que la contrainte K est qualifiée. On dit que la pénalisation est exacte si il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $x_\epsilon = \bar{x}$ pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$. Vérifier que la pénalisation est exacte, si et seulement si, le multiplicateur dans la condition nécessaire d'optimalité pour $\bar{x}$ est nul.
7. Comparer les résultats avec la méthode de pénalisation intérieure de l'exercice précédent.

Exercice 25 (Méthode de pénalisation exacte)**.** Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, strictement convexes avec f coercive. On note $\bar{x}$ l'unique solution du problème sous contrainte

$$\min_{x \in K} f(x) \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ g(x) \leq 0\}$$

On suppose que la contrainte K est qualifiée et on note λ le multiplicateur dans la condition nécessaire d'optimalité pour $\bar{x}$.

Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$J_\epsilon(x) := f(x) + \frac{1}{\epsilon} \left(\max\{0, g(x)\}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Montrer que J_ϵ possède un unique minimum x_ϵ dans $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que si $\epsilon \in]0, 1/\lambda[$, alors $x_\epsilon = \bar{x}$.
3. En pratique, la valeur de λ est inconnue et on doit chercher à l'estimer. Montrer que $x_\epsilon = \bar{x}$ si $\epsilon \in]0, M^{-1}[$ avec $M := \max_{x \in K} \|\nabla f(x)\| / \min_{x \in \partial K} \|\nabla g(x)\|$.

Exercice 26. L'objectif de l'exercice est de montrer qu'on peut mettre tout problème d'optimisation avec critère et contraintes affines sous la forme standard de la programmation linéaire. Soit C une matrice de format $m \times n$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^m$.

1. On considère le problème

$$(P1) \qquad \inf_{x \in K} \langle a, x \rangle \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^n_+, \ Cx \leq d\}.$$

   On définit alors $\tilde{a} = (a, 0) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\tilde{C} := (C \ I_m)$ de format $m \times (n + m)$. Montrer que le problème $(P1)$ est "équivalent" au problème

$$(P2) \qquad \inf_{(x,y) \in K} \langle \tilde{a}, (x, y) \rangle \qquad \text{où } K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}_+, \ \tilde{C}(x, y) = d\}$$

   au sens où la valeur de l'infimum est la même et où l'on peut construire les solutions de l'un à partir des solutions de l'autre.

2. On considère le problème

$$(P3) \qquad \inf_{x \in K} \langle a, x \rangle \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^n, \ Cx = d\}.$$

   On pose $\tilde{a} = (a, -a)$ et $\tilde{C} = (C, -C)$. Montrer que le problème $(P3)$ est "équivalent" au problème

$$(P4) \qquad \inf_{(x,y) \in K} \langle \tilde{a}, (x, y) \rangle \qquad \text{où } K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}_+, \ \tilde{C}(x, y) = d\}$$

Exercice 27. Soit

$$K := \{x = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5_+ \;:\; x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1,\; x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1\}.$$

Déterminer les sommets de K.

Exercice 28. On rappelle que, si Γ est une matrice de format $M \times N$, l'ensemble $\{\Gamma x,\; x \in \mathbb{R}^N_+\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^M$. On considère le problème de programmation linéaire

$$(P) \qquad \inf_{x \in K} \langle a, x\rangle \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^n_+,\; Cx = d\}.$$

Montrer que soit l'infimum est $-\infty$, soit le problème admet un minimum.
(Indication : on pourra considérer l'ensemble $\{(Cx, a^T x),\; x \in \mathbb{R}^n_+\}$.)

Exercice 29. On rappelle qu'un point extrémal d'un ensemble convexe fermé $K \subset \mathbb{R}^n$ est un point x de K tel que, s'il existe $x^1, x^2 \in K$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda x^2)$, alors $x^1 = x^2 = x$.

Montrer qu'un ensemble convexe compact K possède toujours un point extrémal. Est-ce encore le cas si K n'est pas compact ?
(Indication : on pourra considérer le point x de K de norme euclidienne maximale.)

2 Programmation dynamique

2.1 Contrôle optimal en temps discret

Exercice 30. On revisite ici la partie sur le contrôle optimal en temps discret et en horizon fini, en supposant que les ensembles de contrôles dépendent à chaque instant n de la position courante x_n : autrement dit, u_n appartient en fait à $U_n(x_n)$ où, pour tout $x \in X$, $U_n(x)$ est un sous-ensemble d'un ensemble fixé U. La fonction valeur est alors définie par

$$V(\bar{n}, \bar{x}) := \inf_{(u_n)} \sum_{n=\bar{n}}^{N-1} \ell_n(x_n, u_n) + g(x_N)$$

où l'infimum est pris sur les éléments $(u_n) = (u_{\bar{n}}, \dots, u_{N-1})$ tels que

$$\begin{cases} x_{\bar{n}} = \bar{x} \\ x_{n+1} = f_n(x_n, u_n) \text{ où } u_n \in U_n(x_n) \qquad n = \bar{n},\ 1,\ 2, \dots,\ N-1 \end{cases}$$

1. Montrer que le principe de programmation dynamique prend alors la forme :

$$V(\bar{n}, x) = \inf_{u \in U_{\bar{n}}(x)} \left\{ \ell_{\bar{n}}(x, u) + V(\bar{n}+1, f_{\bar{n}}(x, u)) \right\}, \qquad V(N, x) = g(x).$$

2. On suppose que pour tout $(n, x) \in \{0, \dots, N-1\} \times X$, il existe un "feedback optimal" $u_n^*(x) \in U_n(x)$ dans la programmation dynamique, i.e. vérifiant

$$\ell_n(x, u_n^*(x)) + V(n+1, f_n(x, u_n^*(x)) = \inf_{u \in U_n(x)} \left\{ \ell_n(x, u) + V(n+1, f_n(x, u)) \right\}.$$

   Expliciter les contrôles optimaux dans ce cadre.

3. Adapter la démarche aux problèmes à horizon infini (où $u_n \in U(x_n)$ où $U(x)$ ne dépend pas de n).

Exercice 31. Pour $x \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème

$$W(x) := \inf\{ \sum_{i=0}^{N-1} u_i^2, \text{ où } u_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{N-1} u_i = x \}$$

On se propose de comparer $W(x)$ par deux méthodes :

1. Calculer $W(x)$ en utilisant les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker.
2. Ecrire le problème comme un problème de contrôle à horizon N et utiliser le principe de programmation dynamique. Pour cela,
   (a) Réécrire le problème en posant $U_n(x) = [0, x]$ pour $n \leq N-2$, $U_{N-1}(x) = x$, $f_n(x, u) = x - u$, $g = 0$, $\ell_n(x, u) = u^2$.
   (b) En utilisant l'exercice 30, écrire la programmation dynamique pour les fonctions valeurs V_n.
   (c) En déduire que $V_n(x) = x^2/(N-n)$.
   (d) Calculer $W(x)$.
3. Comparer les deux méthodes.

Exercice 32. On s'intéresse au problème de croissance optimale décrit par

$$\sup_{(k_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\right)$$

sous les contraintes : $k_0 = k$ (où $k > 0$ est donné), $k_{t+1} \in [0, k_t^{\alpha}]$ pour tout $t \in \mathbb{N}$. Le taux d'actualisation $\beta \in]0,1[$ et la puissance $\alpha \in]0,1[$ sont donnés.

Pour $k > 0$, on note $W(k)$ la valeur de ce problème. L'interprétation économique est que (k_t) représente le capital à l'instant t, la différence $k_t^{\alpha} - k_{t+1}$ étant la consommation (en gros la différence entre la production k_t^{α} et l'investissement k_{t+1} à l'instant t).

1. Pour $k > 0$, soit $v(k)$ la fonction valeur du problème
$$v(k) := \sup_{(k_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(k_t^{\alpha}\right)$$
sous les mêmes contraintes que pour W. Montrer que $v(k) = \dfrac{\alpha \ln(k)}{1 - \alpha\beta}$ et que que $W \leq v$.
2. Montrer que W est solution de l'équation de de point fixe : $f = Tf$ avec T l'opérateur défini par
$$Tf(x) := \sup_{y \in [0, x^{\alpha}]} \left\{ \ln(x^{\alpha} - y) + \beta f(y) \right\}.$$
pour tout $x > 0$.
3. Pourquoi ne peut on pas affirmer ici directement que W est l'unique solution de l'équation de Bellman ?
4. Montrer que $Tv = v + c$ avec c une constante négative à déterminer.
5. Calculer les itérées $T^n v$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que cette suite converge vers une limite v_∞ que l'on explicitera. Montrer enfin que $Tv_\infty = v_\infty$.
6. Montrer que $W \leq v_\infty$.
7. Montrer que $W \geq v_\infty$ (plus difficile) et conclure.
8. Montrer que le problème initial admet une solution unique que l'on calculera. On notera (k_t^*) cette politique optimale.
9. Etudier la dynamique optimale (k_t^*) (monotonie, convergence).

2.2 Calcul des variations

Exercice 33. Calculer les extrémales des problèmes suivants :

$$J_1(x) = \int_0^1 2tx(t) - x^2(t) + 3x^2(t)x'(t)\ dt$$

et

$$J_2(x) = \int_0^1 t\sqrt{1 + (x'(t))^2}\ dt$$

Exercice 34. Calculer les extrémales des problèmes suivants :

$$J_1(x) = \int_0^1 (x'(t))^2 + 12tx(t)\ dt \qquad \text{avec } x(0) = 2,\ x(1) = 3\ ,$$

$$J_2(x) = \int_0^1 x'(t)(1 + (1+t)^2 x'(t))dt \qquad \text{avec } x(0) = 3,\ x(1) = 2\ .$$

Exercice 35. Montrer que le problème consistant à minimiser

$$J(x) = \int_0^1 |x'(t)||1 - x'(t)| + (x(t))^2 \, dt$$

sur $H^1(0, 1; \mathbb{R})$ avec données au bord $x(0) = x(1) = 0$ a pour infimum 0, mais que cet infimum n'est pas atteint.

2.3 Contrôle optimal en temps continu

Exercice 36. On suppose que $N = 1$ (on travaille dans $\mathbb{R}$), que $U = [-1, 1]$, $f(x, u) = u$ et $L = 0$. On suppose aussi que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

1. Montrer qu'alors la fonction valeur du problème de contrôle est donnée par

$$V(t, x) = \min_{y \in [x-(T-t), x+(T-t)]} g(y) \qquad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

2. Montrer que V est continue, mais pas forcément de classe C^1 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.
3. On suppose que g est convexe. Montrer que V est de classe C^1 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ et donner l'équation de Hamilton-Jacobi satisfaite par V.

Exercice 37. On considère une entreprise de pêche qui puise dans une population de poissons dont on note $x(t)$ la taille à la date t, si la pêche par unité de temps est notée $v(t)$, l'évolution de $x(t)$ est régie par l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = ax(t) - v(t), \; x(t) = x_0$$

où le taux de croissance de la population de poissons $a > 0$ ainsi que le stock initial de poissons $x_0 > 0$ sont donnés. Le but de l'entreprise de pêche est de maximiser son profit actualisé sur une période $[0, T]$:

$$\int_0^T e^{-\lambda t}(v(t) - C(v(t)))dt$$

où C est une fonction de coût strictement convexe et régulière telle que $C'(0) = 0$ et $\lim_{v \to +\infty} C'(v) = +\infty$ et $\lambda > 0$ est un facteur d'actualisation.

1. Formuler le problème sous la forme d'un problème de calcul des variations.
2. Montrer que le problème possède au plus une solution.
3. Ecrire les conditions d'optimalité.
4. (il sera commode de poser $y(t) = e^{-\lambda t}(1 - C'(ax(t) - \dot{x}(t))$ et de définir la constante α comme la racine de l'équation $C'(\alpha) = 1$) et calculer la stratégie de pêche optimale.
5. A quelle condition reste-t-il des poissons quel que soit l'horizon T ?

Exercice 38. On s'intéresse ici au modèle de croissance optimale de Ramsey dans le cas d'un seul secteur de production. Par souci de simplicité on se limitera à un horizon fini $T > 0$. On notera $c(t)$ la consommation instantanée d'un ménage représentatif dont la satisfaction est supposée mesurée par la quantité

$$\int_0^T \exp\{-\delta t\} U(c(t)) dt$$

où la consommation doit satisfaire la contrainte $c(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$, $\delta > 0$ est le taux d'escompte (donné), et la fonction d'utilité $U : [0,+\infty \to \mathbb{R}$ est supposée strictement concave, croissante et dérivable. On notera par ailleurs $y(t)$, $k(t)$ et $i(t)$ la production, le capital et l'investissement dans l'économie au temps t. On suppose les relations suivantes entre les différentes quantités :

$$y(t) = c(t) + i(t),\ i(t) = \dot{k}(t) \text{ et } y(t) = f(k(t))$$

où f une fonction de production supposée strictement concave, croissante et dérivable.

1. Mettre le modèle sous la forme d'un problème de contrôle optimal, dire quelle est la variable de contrôle et celle d'état.
2. Former le Hamiltonien du problème et écrire les conditions nécessaires fournies par le principe de Pontryagin.
3. Définir la fonction valeur du problème et écrire l'équation de Hamilton-Jacobi associée, ainsi qu'une condition aux limites qu'elle vérifie.
4. Donner une condition suffisante d'optimalité.

Exercice 39. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, on s'intéresse au problème de contrôle optimal :

$$\inf \left\{ \int_0^T u^2(s)ds + x(T),\ \text{où } x(0) = x,\ \dot{x}(t) = x(t) + u(t),\ u(t) \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Calculer le Hamiltonien $H(t,x,p)$ du problème.
2. Utiliser le principe du maximum de Pontryagin pour trouver les solutions optimales.
3. Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi associée au problème et en donner une solution.
4. En déduire un feedback optimal pour le problème.
5. Résoudre le problème initial en utilisant le formalisme du calcul des variations.

Exercice 40 (Lien entre l'équation de Hamilton-Jacobi et le principe du maximum)**.** On suppose que la fonction valeur V est de classe C^∞ et que H est également de classe C^∞. On considère la solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x^*(t), p^*(t)), & t \in [0,T] \\ p^*(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x^*(t)), & t \in [0,T] \\ x^*(0) = x_0 \end{cases}$$

Montrer alors que x^* est une trajectoire optimale et que le couple (x^*, p^*) vérifie le principe du maximum de Pontryagin.

Exercice 41 (Problème en horizon infini)**.** Soit $\lambda > 0$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^N$ une condition initiale fixée, on considère le problème de contrôle optimal en horizon infini :

$$V(x_0) := \inf_{(x,u)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} L(x(t), u(t))\, dt$$

sous la contrainte que $u : [0,+\infty[\to U$ est mesurable et que le couple $(x(\cdot), u(\cdot))$ vérifie l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & t \in [0,+\infty[\\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On définit le *Hamiltonien du système* $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par

$$H(x,p) := \sup_{u\in U} \{-\langle p, f(x,u)\rangle - L(x,u)\}\,.$$

L'application $L : \mathbb{R}^N \times U \to \mathbb{R}$ est supposée continue et bornée et f vérifie les conditions habituelles.

1. Montrer que V satisfait le principe de programmation dynamique : pour tout $t \geq 0$,

$$V(x_0) = \inf_{(x,u)} \int_0^t e^{-\lambda s} L(x(s), u(s))\ ds + e^{-\lambda t} V(x(t))$$

2. On suppose que V est de classe C^1. Montrer que V est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\lambda V(x) + H(x, \frac{\partial V}{\partial x}) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

3. Inversement, on suppose qu'il existe une fonction $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, de classe C^1 et *bornée*, vérifiant

$$\lambda W(x) + H(x, \frac{\partial W}{\partial x}) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

   On suppose de plus qu'il existe un feedback $\tilde{u}^* : \mathbb{R}^N \to U$ continu tel que

$$-\langle \frac{\partial W}{\partial x}, f(x, \tilde{u}^*(x))\rangle - L(x, \tilde{u}^*(x)) = H(x, \frac{\partial W}{\partial x}), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

   Montrer alors que $W = V$ et que $\tilde{u}^*$ est un feedback optimal.

Partiel du 26 Mars 2015
“Optimisation et programmation dynamique”

Master mention Mathématiques appliquées 1ère année
Université Paris Dauphine

Dans tout le partiel, on note $\Pi_K(x)$ la projection orthogonale d'un point x de $\mathbb{R}^n$ sur un convexe fermé non vide K de $\mathbb{R}^n$. Si $y = (y_i)_{i=1,\dots,m}$ et $z = (z_i)_{i=1,\dots,m}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$, on écrit $y \leq z$, si et seulement si, $y_i \leq z_i$ pour tout $i = 1, \dots, m$.

Exercice 1. On cherche à résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{(x,y,z)\in K} x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{où} \qquad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}\ .$$

1. Montrer que le problème admet une unique solution.
2. Montrer que la contrainte est qualifiée en tout point.
3. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème et en déduire la solution du problème $(\mathcal{P})$.
4. Retrouver la solution du problème $(\mathcal{P})$ par la méthode de dualité.

Exercice 2. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, C une matrice réelle de taille $m \times n$ et $d \in \mathbb{R}^m$. On suppose que l'ensemble $K := \{x \in \mathbb{R}^n,\ Cx \leq d\}$ est non vide.

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $y = \Pi_K(x)$, si et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ avec $\lambda \geq 0$, $y - x + C^T\lambda = 0$ et $\lambda^T(Cy - d) = 0$ (où C^T est la transposée de la matrice C).
(Indication : Ecrire les conditions nécessaires du problème d'optimisation satisfait par $\Pi(x)$).

Exercice 3. Soient C_1 et C_2 deux convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ d'intersection non vide. On suppose qu'on sait effectuer numériquement la projection Π_{C_1} et Π_{C_2} sur les ensembles C_1 et C_2. On cherche à trouver un point de $C_1 \cap C_2$.

Pour $\tau \in]0, 2[$ un paramètre fixé et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ une position initiale donnée, on définit l'algorithme

$$\begin{aligned}
&x_0 = \bar{x} \\
&x_{n+1/2} = x_n + \tau\left(\Pi_{C_1}(x_n) - x_n\right) \qquad (n \in \mathbb{N}) \\
&x_{n+1} = x_{n+1/2} + \tau\left(\Pi_{C_2}(x_{n+1/2}) - x_{n+1/2}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

1. Montrer que, si C est un convexe fermé non vide, $x \in C$ et $y \in \mathbb{R}^n$, alors :
$$\|y + \tau\left(\Pi_C(y) - y\right) - x\|^2 \leq \|y - x\|^2 - \tau(2 - \tau)\,\|\Pi_C(y) - y\|^2\ .$$
2. En déduire que, pour tout $x \in C_1 \cap C_2$, on a :
$$\|x_{n+1} - x\|^2 \leq \|x_n - x\|^2 - \tau(2 - \tau)\left(\left\|\Pi_{C_2}(x_{n+1/2}) - x_{n+1/2}\right\|^2 + \|\Pi_{C_1}(x_n) - x_n\|^2\right).$$
3. Montrer alors que, pour tout $x \in C_1 \cap C_2$, la suite $(\|x_n - x\|^2)$ converge et vérifier que la suite (x_n) est bornée.
4. Montrer que toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) appartient à $C_1 \cap C_2$.

Examen du 01/06/2015
"Optimisation et programmation dynamique"

Master mention Mathématiques appliquées 1ère année
Université Paris Dauphine

Exercice 1. Pour un entier $T \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 = 1$, on considère le problème

$$\inf_{(x_{t+1},u_t)_{t=0,\dots,T-1}} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{2}\left(x_t^2 + u_t^2\right) + \frac{1}{2}x_T^2$$

sous contrainte $(x_{t+1}, u_t)_{t=0,\dots,T-1} \in \mathbb{R}^{2T}$ et

$$x_{t+1} = x_t + u_t \qquad \forall t \in \{0, \dots, T-1\}.$$

Dans les questions 1 à 3, on considère le problème comme un problème d'optimisation sous contrainte. Dans la question 4, on le regarde comme un problème de contrôle optimal en temps discret.

1. Montrer que le problème possède au moins une solution $(\bar{x}_{t+1}, \bar{u}_t)_{t=0,\dots,T-1} \in \mathbb{R}^{2T}$.
2. Montrer que cette solution est unique.
3. Justifier et énoncer les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème.
4. Pour $(t_0, x_0) \in \{0, \dots, T-1\} \times \mathbb{R}$ et $x_{t_0} = x_0$, on pose

$$V(t_0, x_0) = \min_{(x_{t+1},u_t)_{t=t_0,\dots,T-1}} \sum_{t=t_0}^{T-1} \frac{1}{2}\left(x_t^2 + u_t^2\right) + \frac{1}{2}x_T^2$$

sous contrainte $(x_{t+1}, u_t)_{t=t_0,\dots,T-1} \in \mathbb{R}^{T-t_0}$ et

$$x_{t+1} = x_t + u_t \qquad \forall t \in \{t_0, \dots, T-1\}.$$

(a) Montrer que, pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + V(t+1, x+u).$$

(b) En déduire par récurrence (décroissante) que, pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$, il existe $\alpha_t \in [1, +\infty[$ tel que

$$V(t, x) = \frac{1}{2}\alpha_t x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On montrera que $\alpha_{T-1} = 3/2$ et on donnera l'expression de α_t en fonction de α_{t+1} pour tout $t \in \{0, \dots, T-2\}$.

(c) Calculer la solution du problème pour $T = 2$.

Exercice 2. Soit H^1 l'espace de Sobolev $W^{1,2}([0,1], \mathbb{R})$ et H_0^1 l'ensemble des éléments x de H^1 tels que $x(0) = x(1) = 0$. On rappelle que, si $x \in H_0^1$, alors la fonction $y(t) := \max\{0, x(t)\}$ appartient aussi à H_0^1 et vérifie, pour presque tout $t \in [0,1]$,

$$y'(t) = \begin{cases} x'(t) & \text{si } x(t) > 0 \\ 0 & \text{si } x(t) \leq 0 \end{cases}$$

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ *strictement décroissante avec* $h(0) = 0$. On définit E comme étant l'ensemble des éléments $x \in H_0^1$ tels que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}(x'(t))^2 dt = 1$.

On considère le problème

$$(P) \qquad \inf_{x \in E} J(x) \qquad \text{où } J(x) = \int_0^1 h(x(t))\, dt.$$

1. On suppose qu'il existe une solution $\bar{x}(\cdot)$ au problème (P) qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que $\bar{x}$ n'est pas identiquement nulle.
   (b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\lambda \bar{x}''(t) = h'(\bar{x}(t)) \qquad \forall t \in [0,1].$$

   (c) On suppose, *dans cette question seulement*, que $h(z) = -z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Calculer alors $\bar{x}$.
   (d) En utilisant le fait que h est strictement décroissante et que $h(0) = 0$, montrer qu'il existe $x \in E$ avec $J(x) < 0$.
   (e) En déduire qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $\bar{x}(t) > 0$.
   (f) Conclure que $\bar{x}$ est une fonction concave sur $[0,1]$.
2. Soit (x_n) une suite minimisante du problème (P) :

   $$x_n \in E \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in E} J(x).$$

   (a) On pose $\tilde{x}_n(t) = \max\{0, x_n(t)\}$ et $\theta_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}(\tilde{x}_n'(t))^2 dt$. Montrer, en utilisant la question 1.(d), qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\theta_n \in]0,1]$ pour tout $n \geq n_0$.
   (b) On pose alors $y_n(t) = \theta_n^{-1/2} \tilde{x}_n(t)$. Montrer que (y_n) est encore une suite minimisante pour le problème (P).

   On rappelle un résultat de cours qui affirme qu'il existe une sous-suite (y_{n_k}) et $y \in H_0^1$ tels que la suite (y'_{n_k}) tend faiblement vers y' dans $L^2([0,1])$ et la suite (y_{n_k}) converge uniformément vers y sur $[0,1]$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}(y'(t))^2 dt \leq 1$.
   (d) Montrer qu'en fait $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}(y'(t))^2 dt = 1$.
   (difficile : on pourra raisonner par l'absurde, puis s'inspirer de la question 2-(b)).
   (e) Conclure à l'existence d'une solution au problème (P).

Barême indicatif : Ex. 1 : 10 pts, Ex. 2-1 : 10 pts, Ex. 2-2 : 10 pts.