Université Paris Dauphine
Master 1 Mathématiques et Applications
Systèmes différentiels et géométrie

Examen du 18/01/2019.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 (Un problème de perturbation singulière) Soient $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1. On supposera que f et g sont globalement lipschitziennes et que f est bornée. Etant donné $\epsilon > 0$, on considère le système différentiel

$$(S_\epsilon) \qquad \begin{cases} \dot{x}^\epsilon(t) = f(x^\epsilon(t), y^\epsilon(t)) \\ \dot{y}^\epsilon(t) = \dfrac{1}{\epsilon} g(x^\epsilon(t), y^\epsilon(t)) \end{cases}$$

(où, dans tout l'exercice, $\dot{z}$ désigne la dérivée temporelle d'une fonction $z = z(t)$). Le but de l'exercice est de comprendre, dans un cas simple, la limite des solutions du système (S_ϵ) lorsque $\epsilon \to 0$. Pour cela, nous faisons l'hypothèse suivante sur g : il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \leq -\alpha \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ tel que $g(x, \varphi(x)) = 0$.
2. En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer que φ est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que φ est globalement lipschitzienne dans $\mathbb{R}^n$.
4. Vérifier que
$$(y - \varphi(x))g(x, y) \leq -\alpha(y - \varphi(x))^2 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

   Etant donné $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, soit (x^ϵ, y^ϵ) la solution du système (S_ϵ) avec donnée initiale $(x^\epsilon(0), y^\epsilon(0)) = (x_0, y_0)$ et soit x la solution de l'équation différentielle
$$(S) \qquad \dot{x}(t) = f(x(t), \varphi(x(t)))$$
   de donnée initiale $x(0) = x_0$. On pose
$$\rho^\epsilon(t) = (x^\epsilon(t) - x(t))^2 + \sqrt{\epsilon}(y^\epsilon(t) - \varphi(x(t)))^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

5. (question assez calculatoire) Montrer qu'il existe des constantes $C > 0$ et $\epsilon_0 > 0$, dépendant des constantes de Lipschitz de f et de φ, de $\|f\|_\infty$ et de α, telles que
$$\dot{\rho}^\epsilon(t) \leq C\rho^\epsilon(t) + \epsilon \qquad \forall t \geq 0,\ \forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[.$$
   (indication : on pourra utiliser l'inégalité $ab \leq (a^2 + b^2)/2$).
6. En déduire que x^ϵ tend vers x uniformément sur tout intervalle de la forme $[0, T]$, où $T > 0$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2. On suppose que f vérifie les conditions suivantes : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(\mathbf{C1}) \qquad \langle f(x,y),(x,y)\rangle < 0 \text{ si } x^2+y^2=4 \qquad \text{et} \qquad \langle f(x,y),(x,y)\rangle > 0 \text{ si } x^2+y^2=1$$

ainsi que

$$(\mathbf{C2}) \qquad \langle f(x,y),(-y,x)\rangle > 0 \qquad \text{si } 1 \leq x^2+y^2 \leq 4.$$

Etant donné $r \in [1,2]$, on considère la solution maximale $(I^r,(x^r,y^r))$ de l'équation différentielle

$$(*) \qquad \begin{cases} (\dot{x}(t),\dot{y}(t)) = f(x(t),y(t)) & t \in I \\ (x(0),y(0)) = (r,0) \end{cases}$$

1. Montrer que $R(t,r) := \sqrt{(x^r(t))^2+(y^r(t))^2}$ vérifie :

   $$R(t,r) \in [1,2] \qquad \forall t \in I^r,\ t \geq 0.$$

   (on pourra raisonner par l'absurde et calculer $\frac{d}{dt}R(t,r)$ au temps t où $R(\cdot,r)$ de sort de l'intervalle $]1,2[$).

2. Déduire de la question précédente que $[0,+\infty[\subset I^r$.

   Soit
   $$\Theta(t,r)) = \int_0^t \frac{\langle f(x^r(s),y^r(s)),(-y^r(s),x^r(s))\rangle}{(R(s,r))^2}ds, \qquad \forall t \in I^r.$$

   On admettra que

   $$(x^r(t),y^r(t)) = R(t,r)(\cos(\Theta(t,r)),\sin(\Theta(t,r))) \qquad \forall t \in I^r.$$

3. Montrer que $R : \mathbb{R}\times[1,2] \to \mathbb{R}$ et $\Theta : \mathbb{R}\times[1,2] \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[\times[1,2]$.

4. Montrer que, pour tout $r \in [1,2]$ il existe un unique $\tau(r) \geq 0$ tel que $\Theta(\tau(r),r) = 2\pi$.

5. Montrer que l'application $r \to \tau(r)$ est continue dans $[1,2]$.

6. On pose $P(r) = R(\tau(r),r)$. Montrer que P est continue et en déduire l'existence de $\bar{r} \in [1,2]$ point fixe de P.

7. Conclure que l'équation différentielle (*) possède au moins une solution périodique.

Barème indicatif : Exercice 1 : 10 points. Exercice 2 : 10 points.