Université de Paris-Dauphine
Algèbre Linéaire 1

Algèbre Linéaire 1 - Galop d'essai 1
Durée 2h

Exercice 1. (rattrapage 26/08/2013)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice carrée de format n dont tous les coefficients sont égaux à 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. On note I_n la matrice identité de format n.

   (i) Rappeler la définition du produit matriciel et en déduire l'expression de A^2 en fonction de n et de A.

   (ii) En déduire sans calcul que ni A ni $A - nI_n$ ne sont inversibles (on pourra raisonner par l'absurde).

   (iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq n$. Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible et donner son inverse en le cherchant sous la forme $\alpha A + \beta I_n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. (rattrapage 26/08/2013)

1. On considère le nombre complexe $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$. Ecrire $1+i\sqrt{3}$ et $1-i$ sous forme trigonométrique et en déduire la forme algébrique de z.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \overline{z}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $(X-1)^2$ divise le polynôme $P(X) = aX^{n+2} + bX^n - 1$.

Exercice 3. (rattrapage 26/08/2013) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq i$ on pose $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. On définit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) < 0\}$.

1. Montrer que f est injective.

2. f est-elle une bijection entre $\mathbb{C} \backslash \{i\}$ et $\mathbb{C}$?

3. Montrer que l'image par f de D est contenue dans P.

4. Montrer finalement que f est une bijection de D dans P et déterminer f^{-1}.

Tourner la page SVP

Exercice 4. (examen du 17/01/2013) Soit Φ l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Phi(P)$ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Phi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\Phi(P)$ est le polynôme nul (i.e., tels que $P(X+1) - P(X) = 0$).

2. Montrer que
$$\Phi(aP + bQ) = a\Phi(P) + b\Phi(Q) \qquad \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}\ .$$

3. On pose $H_0(X) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(X) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$. Montrer que $\Phi(H_n) = H_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

4. Soit $P(X) = X^2$ et $Q = 2H_3 + H_2$. Vérifier que $\Phi(Q) = P$.

5. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \Phi(Q)(k) = Q(n+1) - Q(0)$$
(où P et Q sont définis à la question précédente). En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .$$