Université de Paris-Dauphine
Algèbre Linéaire 1

Algèbre Linéaire 1 - Galop d'essai 1 - Corrigé
Durée 2h

Exercice 1. (rattrapage 26/08/2013)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice carrée de format n dont tous les coefficients sont égaux à 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. On note I_n la matrice identité de format n.

   (i) Rappeler la définition du produit matriciel et en déduire l'expression de A^2 en fonction de n et de A.

   (ii) En déduire sans calcul que ni A ni $A - nI_n$ ne sont inversibles (on pourra raisonner par l'absurde).

   (iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq n$. Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible et donner son inverse en le cherchant sous la forme $\alpha A + \beta I_n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solution :

1. On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. *(i)* $A^2 = nA$.

(ii) On réécrit la relation $A^2 = nA$ *sous la forme* $A(A - nI_n) = 0$. *Donc, si* A *était inversible, on aurait*

$$A^{-1}(A(A - nI_n)) = A^{-1}0 = 0,$$

soit encore $(A - nI_n) = 0$, *ce qui est impossible puisque* $A \neq nI_n$. *Donc* A *n'est pas inversible.*

(iii) On veut que $I_n = (A - \lambda I_n)(\alpha A + \beta I_n) = A(\alpha n - \lambda\alpha + \beta) - \lambda\beta I_n$, *car* $A^2 = nA$. *Cela suggère le choix* $\beta = -1/\lambda$ *et* $\alpha = 1/(\lambda(n - \lambda))$ *(qui est possible puisque* $\lambda \neq 0$ *et* $\lambda \neq n$*). On vérifie alors facilement que* $A/(\lambda(n - \lambda)) - I_n/\lambda$ *est bien l'inverse de* A.

Exercice 2. (rattrapage 26/08/2013)

1. On considère le nombre complexe $z = \left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$. Ecrire $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i$ sous forme trigonométrique et en déduire la forme algébrique de z.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \overline{z}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $(X-1)^2$ divise le polynôme $P(X) = aX^{n+2} + bX^n - 1$.

Solution :

1. *Comme* $1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$ *et* $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$, *on a* $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$. *Comme*

$$(e^{\frac{7i\pi}{12}})^{20} = e^{\frac{(7\times 20)i\pi}{12}} = e^{\frac{35i\pi}{3}} = e^{12i\pi - \frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

on trouve $z = 2^9 - i2^9\sqrt{3}$.

2. *On suppose que* $z^n = \overline{z}$ *et on écrit* z *sous forme trigonométrique :* $z = re^{i\theta}$. *Alors on doit avoir* $r^n e^{in\theta} = re^{-i\theta}$, *ce qui implique que* $r^n = r$ *et, soit* $r = 0$, *soit* $n\theta = -\theta \pmod{2\pi}$. *On a donc, soit* $r = 0$ *(i.e.,* $z = 0$*), soit* $r = 1$, *auquel cas* $\theta = 2k\pi/(n+1)$ *(où* $k \in \mathbb{Z}$*). Inversement, tous les nombres complexes de la forme* $z = e^{2ik\pi/(n+1)}$ *vérifient*

$$z^n = e^{2ink\pi/(n+1)} = e^{2ik\pi - 2ik\pi/(n+1)} = e^{-2ik\pi/(n+1)} = \overline{z}.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions est $\{0\} \cup \{z = e^{2ik\pi/(n+1)},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3. *Pour que* $(X-1)^2$ *divise le polynôme* $P(X) = aX^{n+2} + bX^n - 1$, *par théorème de cours il faut et il suffit que* $P(1) = P'(1) = 0$, *c'est-à-dire* $a + b - 1 = 0$ *et* $a(n+2) + bn = 0$. *On trouve une unique solution :* $a = -n/2$, $b = 1 + n/2$.

Exercice 3. (rattrapage 26/08/2013) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq i$ on pose $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. On définit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) < 0\}$.

1. Montrer que f est injective.
2. f est-elle une bijection entre $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ et $\mathbb{C}$?
3. Montrer que l'image par f de D est contenue dans P.
4. Montrer finalement que f est une bijection de D dans P et déterminer f^{-1}.

Solution :

1. *On suppose que les nombres complexes* z *et* z' *sont tels que* $f(z) = f(z')$. *On veut montrer que* $z = z'$. *Comme* $f(z) = f(z')$, *on a* $\dfrac{z+i}{z-i} = \dfrac{z'+i}{z'-i}$, *soit* $(z+i)(z'-i) = (z'+i)(z-i)$. *On développe et on simplifie pour trouver* $i(z'-z) = i(z-z')$, *i.e.,* $2i(z'-z) = 0$. *D'où* $z = z'$. *Par conséquent,* f *est injective.*

2. f *est bien définie sur* $\mathbb{C}\backslash\{i\}$. *Comme* f *est injective,* f *est une bijection entre* $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ *et* $\mathbb{C}$, *si et seulement si,* f *est surjective de* $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ *sur* $\mathbb{C}$. *Soit* $Z \in \mathbb{C}$. *On cherche s'il existe* $z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$ *tel que* $f(z) = Z$. *L'égalité* $f(z) = Z$ *implique que* $z(1-Z) = -iZ - i$. *Si* $Z = 1$, *cette équation n'admet pas de solution. Donc* f *n'est pas surjective, et donc par bijective de entre* $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ *et* $\mathbb{C}$.

3. *Soit Z appartenant à l'image par f de D est contenue dans P : il existe $z \in D$ tel que $f(z) = Z$. Comme $z \in D$, on a $|z| < 1$. Alors*

$$Z = \frac{z+i}{z-i} = \frac{(z+i)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2} = \frac{|z|^2 + i(z+\overline{z}) - 1}{|z-i|^2}.$$

Comme $z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z) \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\mathcal{R}e(Z) = \dfrac{|z|^2-1}{|z-i|^2}$. Or $|z| < 1$, donc $\mathcal{R}e(Z) < 0$. Finalement, $Z \in P$.

4. *On a vu que f est bien définie de D dans P. Comme f est injective, il suffit de prouver que f est surjective. Soit $Z \in P$. On cherche s'il existe $z \in D$ tel que $f(z) = Z$. L'égalité $f(z) = Z$ implique que $z(1-Z) = -iZ - i$, i.e., puisque $Z \neq 1$ (car $Z \in P$), $z = \frac{-i(Z+1)}{1-Z}$. Montrons que $\frac{-i(Z+1)}{1-Z}$ appartient à D. En effet, si $Z = a+ib$ (avec $a < 0$ puisque $Z \in P$), on a*

$$\left|\frac{-i(Z+1)}{1-Z}\right| = \frac{|Z+1|}{|1-Z|} = \frac{\sqrt{(a+1)^2+b^2}}{\sqrt{(a-1)^2+b^2}} < 1$$

puisque $(a+1)^2 < (a-1)^2$ car $a < 0$. Donc $\frac{-i(Z+1)}{1-Z}$ appartient à D, ce qui prouve que f est surjective et que $f^{-1}(Z) = \frac{-i(Z+1)}{1-Z}$.

Exercice 4. (examen du 17/01/2013) Soit Φ l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Phi(P)$ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Phi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\Phi(P)$ est le polynôme nul (i.e., tels que $P(X+1) - P(X) = 0$).

2. Montrer que

$$\Phi(aP + bQ) = a\Phi(P) + b\Phi(Q) \qquad \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}\ .$$

3. On pose $H_0(X) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(X) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$. Montrer que $\Phi(H_n) = H_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

4. Soit $P(X) = X^2$ et $Q = 2H_3 + H_2$. Vérifier que $\Phi(Q) = P$.

5. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \Phi(Q)(k) = Q(n+1) - Q(0)$$

(où P et Q sont définis à la question précédente). En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .$$

Solution :

1. *On note que $\Phi(P)$ est le polynôme nul, si et seulement si, $P(X+1)-P(X)=0$. Notons que, si α est une racine réelle ou complexe de P, alors $\alpha+1$ est aussi racine de P puisque $P(\alpha+1)=P(\alpha)=0$. Par récurrence, on en déduit que $\alpha+n$ est racine de P pour tout $n\in\mathbb{N}$. Donc P possède une infinité de racines distinctes, c'est-à-dire P est le polynôme nul. On en déduit que, soit $P=0$, soit P ne possède pas de racine dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire, P est un polynôme de degré 0. Dans les deux cas, P est un polynôme constant.*

   Inversement, si P est un polynôme constant, il existe $c\in\mathbb{R}$ avec $P(X)=c$. Alors $\Phi(P)(X)=c-c=0$, et donc $\Phi(P)$ est le polynôme nul.

   En conclusion, $\Phi(P)$ est le polynôme nul, si et seulement si, P est un polynôme constant.

2. *Soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ et $a,b\in\mathbb{R}$. On a*

$$\begin{aligned}\Phi(aP+bQ)(X) &= (aP+bQ)(X+1)-(aP+bQ)(X)\\ &= aP(X+1)+bQ(X+1)-aP(X)-bQ(X)\\ &= a(P(X+1)-P(X))+b(Q(X+1)-Q(X))\\ &= a\Phi(P)(X)+b\Phi(Q)(X)=(a\Phi(P)+b\Phi(Q))(X)\end{aligned}$$

   D'où $\Phi(aP+bQ)=a\Phi(P)+b\Phi(Q)$.

3. *Si $n\in\mathbb{N}^*$ avec $n\geq 2$, on a*

$$\begin{aligned}\Phi(H_n)(X) &= H_n(X+1)-H_n(X)=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X+1-k)-\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\\ &= \frac{1}{n!}\prod_{k=-1}^{n-2}(X-k)-\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\\ &= \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-2}(X+1-k)\right)((X+1)-(X-n+1))\\ &= \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-2}(X+1-k)\right)n=H_{n-1}\end{aligned}$$

   Dans tous les cas, on a bien que $\Phi(H_n)=H_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$.

4. *Comme $Q=2H_3+H_2$, on a, d'après les questions 2 et 3,*

$$\Phi(Q)=\Phi(2H_3+H_2)=2\Phi(H_3)+\Phi(H_2)=2H_2+H_1\ .$$

   Or $2H_2(X)+H_1(X)=X(X-1)+X=X^2=P(X)$. On a bien que $\Phi(Q)=P$.

5. *On a*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2 &= \sum_{k=0}^{n}P(k) = \sum_{k=0}^{n}\Phi(Q)(k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(Q(k+1)-Q(k)) = Q(n+1)-Q(0)\end{aligned}$$

   où $Q(0)=2H_3(0)+H_2(0)=0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2 &= Q(n+1)-Q(0) = 2H_3(n+1)+H_2(n+1)\\ &= \frac{1}{3}(n+1)n(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$