Université de Paris-Dauphine
Algèbre Linéaire 1

Algèbre Linéaire 1 -Galop d'essai 2 - Corrigé
Durée 2 heures

Exercice 1. (examen du 20/01/2014) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On note A^T la matrice transposée de A et I_3 la matrice identité de format $(3,3)$.

(i) Calculer (très soigneusement) les produits $A^T A$ et AA^T.

(ii) Vérifier sans calcul que $A^T A$ est inversible et donner son inverse.

(iii) Calculer $(AA^T)U$ et en déduire que AA^T n'est pas inversible.

(iv) On pose $B = AA^T - 4I_3$. Montrer par la méthode du pivot de Gauss que B est inversible et calculer son inverse.

Solution :

(i) On trouve

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(ii) Comme $A^T A$ est une matrice diagonale, $A^T A$ est inversible, si et seulement si, tous ses termes diagonaux sont non nuls, ce qui est bien le cas. Donc $A^T A$est inversible et $(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$.

(iii) On trouve $(AA^T)U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme $(AA^T)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est aussi égal à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on déduit d'un résultat de cours que (AA^T) ne peut pas être inversible.

(iv) On trouve $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

Exercice 2. (examen du 20/01/2014) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = -4 - z^4 \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(i) Déterminer toutes les racines 4ièmes de -4 (on exprimera le résultat sous forme algébrique).

(ii) Calculer $f^{-1}(\{0\})$. f est-elle injective ?

(iii) f est-elle surjective ?

(iv) Soient $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \sqrt{2}\}$ et $S_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+4| = 4\}$. Montrer que $f(S_1) = S_2$.

Solution :

(i) D'après le cours, on sait qu'un nombre complexe non nul $z = re^{i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) a exactement 4 racines quatrièmes, qui sont $r^{1/4}e^{i\theta/4}$, $r^{1/4}e^{i\theta/4+i\pi/2}$, $r^{1/4}e^{i\theta/4+i\pi}$, $r^{1/4}e^{i\theta/4+3i\pi/2}$. Pour $z = -4 = 4e^{i\pi}$, on trouve $\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1+i$, $\sqrt{2}e^{3i\pi/4} = -1+i$, $\sqrt{2}e^{5i\pi/4} = -1-i$ et $\sqrt{2}e^{7i\pi/4} = 1-i$. Par conséquent l'ensemble des racines 4ièmes de -4 est $\{1+i, -1+i, -1-i, 1-i\}$.

(ii) Par définition de $f^{-1}(\{0\})$, $z \in f^{-1}(\{0\})$, si et seulement si, $f(z) = 0$, c'est-à-dire, si et seulement si, $z^4 = -4$. Donc $z \in f^{-1}(\{0\})$, si et seulement si, z est racine 4ième de $-4 = 4e^{i\pi}$. On déduit de la question précédente que $f^{-1}(\{0\}) = \{1+i, -1+i, -1-i, 1-i\}$.

Comme $1+i$ et $-1+i$ (par exemple) ont même image, on en déduit que f n'est pas injective.

(iii) Soit $Z \in \mathbb{C}$. On cherche à savoir s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = Z$. L'équation $f(z) = Z$ est équivalente à $z^4 - Z + 4 = 0$, i.e., au fait que z est racine du polynôme de degré 4 $P(X) = X^4 - Z + 4$. Le théorème de d'Alembert dit qu'un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 possède toujours au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Donc P possède une racine, ce qui prouve que Z possède un antécédent par f. Comme Z est quelconque, cela montre que f est surjective.

(iv) Si $z \in S_1$, alors $|z| = \sqrt{2}$ et il existe donc $|f(z)+4| = |z^4| = |z|^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$. Donc $f(z) \in S_2$. Cela prouve que $f(S_1) \subset S_2$. Inversement, si $Z \in S_2$, alors $|Z+4| = 4$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Z + 4 = 4e^{i\theta}$. Posons alors $z = \sqrt{2}e^{i(\theta+\pi)/4}$. On a $|z| = \sqrt{2}$ et donc $z \in S_1$. De plus, $f(z) = -4 - z^4 = -4 - 4e^{i(\theta+\pi)} = -4 + 4e^{i\theta} = Z$. Par conséquent $Z \in f(S_1)$ et $S_2 \subset f(S_1)$. Par double inclusion on a finalement $f(S_1) = S_2$.

Exercice 3. (examen du 20/01/2014) On considère les polynômes $P(X) = X^2 - X + 1$ et $Q(X) = X^4 - 7X^3 + 16X^2 - 15X + 9$.

(i) Le polynôme P est-il premier dans $\mathbb{C}[X]$? Dans $\mathbb{R}[X]$?

(ii) On note Q' le polynôme dérivé de Q. Factoriser Q' dans $\mathbb{R}[X]$ en remarquant que 1 est racine évidente de Q'.

(iii) En déduire la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que Q possède une racine double.

Solution :

(i) Les polynômes premiers de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Comme P est de degré 2, P n'est pas premier dans $\mathbb{C}[X]$. Les polynômes premiers de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ou les polynômes de degré 2 sans racine réelle. Comme P est de degré 2 et n'a pas de racine réelle (car $\Delta = 1^2 - 4.1 = -3 < 0$) on en déduit que P est premier dans $\mathbb{R}[X]$.

(ii) *Comme $Q'(X) = 4X^3 - 21X^2 + 32X - 15$, on a bien $P(1) = 0$. Donc $(X-1)$ divise Q' et, en effectuant la division de Q' par $(X-1)$ on trouve $Q'(X) = (X-1)(4X^2 - 17X + 15)$. On calcule les racines de $4X^2 - 17X + 15$: on trouve $\Delta = 17^2 - 4.4.15 = 49 = 7^2$, et donc $x_1 = (17+7)/8 = 3$ et $x_2 = (17-7)/8 = 5/4$. D'où la factorisation :*

$$Q'(X) = 4(X-1)(X-3)(X-5/4)$$

(iii) *D'après l'énoncé, on sait que Q possède une racine double : il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $Q(\alpha) = Q'(\alpha) = 0$ (et $Q''(\alpha) \neq 0$). Comme α est racine de Q', on déduit de la question précédente que $\alpha \in \{1, 3, 5/4\}$. Or ni 1 ni 5/4 ne sont racines de Q. Donc $\alpha = 3$ est la racine double de Q : cela implique que $(X-3)^2 = X^2 - 6X + 9$ divise Q. Après division euclidienne on trouve $Q(X) = (X^2 - 6X + 9)(X^2 - X + 1) = (X-3)^2 P(X)$. De la première question on sait que P est premier dans $\mathbb{R}[X]$. La factorisation de Q dans $\mathbb{R}[X]$ est donc*

$$Q(X) = (X-3)^2(X^2 - X + 1).$$

Pour calculer la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, on en calcule les racines : $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$. Donc les racines de P sont $z_1 = (1+i\sqrt{3})/2 = e^{i\pi/3}$ et $z_2 = (1-i\sqrt{3})/2 = e^{-i\pi/3}$. La factorisation de Q est $\mathbb{C}[X]$ est donnée par

$$Q(X) = (X-3)^2(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})$$

Exercice 4. (rattrapage du 01/09/2014) Soit P un polynôme *non constant* à coefficients dans $\mathbb{C}$. On appellera également P l'application $z \to P(z)$.

(i) Démontrer que P est surjective.
(Indication : on pourra utiliser le théorème de d'Alembert).

(ii) On suppose que P est injective. Montrer que P a une et une seule racine dans $\mathbb{C}$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P(X) = \alpha(X-\beta)^n$.

(iii) On suppose toujours que P est injective. Montrer que P est nécessairement de degré 1.

Solution

(i) *Soit $y \in \mathbb{C}$. On considère le polynôme $P_y(X) := P(X) - y$. Comme P est non constant, P_y est également non constant. Le théorème de d'Alembert affirme alors que P_y admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$: il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $P_y(z) = 0$. Vu la définition de P_y, cela signifie que $P(z) = y$. Donc y possède un antécédent par P et P est surjective.*

(ii) *Comme P est non constant, on sait que P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert). Soient z_1 et z_2 deux racines de P. Alors $P(z_1) = 0 = P(z_2)$. Comme P est injective, on a $z_1 = z_2$. Donc P ne possède qu'une seule racine dans $\mathbb{C}$. Par factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, on sait alors qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$ (la racine de P) et $n = \deg(P)$ tels que $P(X) = \alpha(X-\beta)^n$. Notons que $n \geq 1$ car P est non constant.*

(iii) *On suppose toujours que P est injective. On sait d'après la question précédente que $P(X) = \alpha(X-\beta)^n$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $n = 1$. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que $n \geq 2$. Il existe exactement n racines $n-$ièmes de l'unité. Soit ω une racine $n-$ième de l'unité différente de 1. Alors $z_1 = 1 + \beta$ et $z_2 = \omega + \beta$ ont même image par P, puisque*

$$P(z_1) = \alpha(1+\beta-\beta)^n = \alpha \qquad \text{et} \qquad P(z_2) = \alpha(\omega+\beta-\beta)^n = \alpha\omega^n = \alpha.$$

Or $z_1 \neq z_2$ (puisque $\omega \neq 1$), ce qui contredit l'hypothèse que P est injective. Donc nous avons montré par l'absurde que $\deg(P) = n = 1$.