Université Paris-Dauphine

Algèbre Linéaire 1 - Galop d'essai 3
Durée 2 heure

Exercice 1 (Examen du 29/08/2012) Soient A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et A^T la matrice transposée de A.

(i) Ecrire la matrice A^T.

(ii) Parmi les expressions suivantes, déterminer lesquelles ont un sens : A^2, $A(A^T)A$, $(A(A^T))^2$, $A(A+A^T)$.
(on ne demande pas le calcul de ces matrices)

(iii) Les matrices $A(A^T)$ et $(A^T)A$ sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

Exercice 2 (Examen du 29/08/2012)

(i) Soient $P(X) = X^7 + 3X^5 - aX^2 + bX + c$ (où a, b et c sont des réels) et $Q(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ deux polynômes. Déterminer a, b et c pour que le polynôme Q divise le polynôme P.

(ii) Un nombre complexe α est dit algébrique s'il existe un polynôme P, *dont tous les coefficients sont des entiers relatifs*, tel que $P(\alpha) = 0$. On suppose que $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a + i\sqrt{b}$ est algébrique.

Exercice 3 (Examen du 29/08/2012)

4.a) Etablir l'égalité suivante :

$$\left(\cos(\frac{\pi}{7}) + i\sin(\frac{\pi}{7})\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{84}) + i\sin(\frac{5\pi}{84})\right)$$

4.b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$.

Exercice 4 (Examen du 29/08/2012) Soient E, F, G et H quatre ensembles non vides et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer qu'alors f, g et h sont également bijectives.

Exercice 5 (Examen du 17/01/2012)

2.a) Soit $n \geq 2$. Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine triple que l'on déterminera.

2.b) En déduire la factorisation du polynôme $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$ en produit de polynômes premiers dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.