Université Paris-Dauphine

Algèbre Linéaire 1 - Galop d'essai 3 - Corrigé
Durée 2 heure

Exercice 1 (Examen du 29/08/2012) Soient A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et A^T la matrice transposée de A.

(i) Ecrire la matrice A^T.

(ii) Parmi les expressions suivantes, déterminer lesquelles ont un sens : A^2, $A(A^T)A$, $(A(A^T))^2$, $A(A + A^T)$.
(on ne demande pas le calcul de ces matrices)

(iii) Les matrices $A(A^T)$ et $(A^T)A$ sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

Solution :

(i) $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Ont un sens : $A(A^T)A$ *et* $(A(A^T))^2$.

(iii) On a $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ *qui n'est pas inversible (par exemple* $AA^T \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *ce qui montre que* AA^T *est un diviseur de* 0 *et donc n'est pas inversible).*

$A^T\ A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ *est inversible, d'inverse* $(A^T\ A)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Examen du 29/08/2012)

(i) Soient $P(X) = X^7 + 3X^5 - aX^2 + bX + c$ (où a, b et c sont des réels) et $Q(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ deux polynômes. Déterminer a, b et c pour que le polynôme Q divise le polynôme P.

(ii) Un nombre complexe α est dit algébrique s'il existe un polynôme P, *dont tous les coefficients sont des entiers relatifs*, tel que $P(\alpha) = 0$. On suppose que $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a + i\sqrt{b}$ est algébrique.

Solution :

(i) On sait que, pour que Q *divise* P*, il faut et il suffit que les racines de* Q *soient racines de* P *avec au moins le même ordre de multiplicité. Or* $Q(X) = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X-i)(X+i)$. *Donc* Q *a pour racines* 1, i *et* $-i$ *qui sont toutes simples. Par conséquent* Q *divise* P *si et seulement si* $P(1) = P(i) = P(-i) = 0$. *Or* $P(1) = 4 - a + b + c$ *et* $P(i)$ $(= \overline{P(-i)})$ $= i(2+b) + a + c$. *On trouve* $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$.

(ii) On cherche un polynôme P de degré 2 à coefficients entiers, tel que $P(a+i\sqrt{b})=0$. Si $P(X)=\alpha X^2+\beta X+\gamma$, où $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}$, les racines de P sont de la forme $\frac{-\beta\pm\delta}{2\alpha}$, avec δ une racine réelle ou complexe de $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Par identification, on voit que le polynôme le plus simple qu'on puisse trouver est $P(X)=X^2-2aX+(a^2+b)$.

Exercice 3 (Examen du 29/08/2012)

4.a) Etablir l'égalité suivante :

$$\left(\cos(\frac{\pi}{7})+i\sin(\frac{\pi}{7})\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{84})+i\sin(\frac{5\pi}{84})\right)$$

4.b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+(2+i)z+2i=0$.

Solution :

4.a)

$$\begin{aligned}(\cos(\frac{\pi}{7})+i\sin(\frac{\pi}{7}))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i) &= \exp(i\frac{\pi}{7})\ \exp(-i\frac{\pi}{3})\ \sqrt{2}\exp(i\frac{\pi}{4})\\ &= \sqrt{2}\exp(i\frac{5\pi}{84})=\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{84})+i\sin(\frac{5\pi}{84}))\end{aligned}$$

4.b) Soit $\Delta=(2+i)^2-8i=(2-i)^2$. Donc les solutions sont $z_1=\frac{-(2+i)+(2-i)}{2}=-i$ et $z_2=\frac{-(2+i)-(2-i)}{2}=-2$.

Exercice 4 (Examen du 29/08/2012) Soient E, F, G et H quatre ensembles non vides et $f:E\to F$, $g:F\to G$ et $h:G\to H$ trois applications. On suppose que $g\circ f$ et $h\circ g$ sont bijectives. Montrer qu'alors f, g et h sont également bijectives.

Solution : On sait que comme $g\circ f$ est bijective, f est injective tandis que g est surjective. De même, comme $h\circ g$ est bijective, g est injective tandis que h est surjective. Donc g est bijective. D'où $f=g^{-1}\circ(g\circ f)$ et $h=(h\circ g)\circ g^{-1}$ sont aussi bijectives puisque la composition d'applications bijectives est bijective.

Exercice 5 (Examen du 17/01/2012)

2.a) Soit $n\geq 2$. Montrer que le polynôme $nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$ admet une racine triple que l'on déterminera.

2.b) En déduire la factorisation du polynôme $3X^5-5X^4+5X-3$ en produit de polynômes premiers dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution :

2.a) Posons $P(X)=nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$. On sait que α est une racine triple de P si et seulement si $P(\alpha)=P'(\alpha)=P''(\alpha)=0$ tandis que $P'''(\alpha)\neq 0$. On calcule alors

$$P'(X)=(n+2)\left[nX^{n+1}-(n+1)X^n+1\right],\ P''(X)=n(n+2)(n+1)\left[X^n-X^{n-1}\right],$$

$$P'''(X) = n(n+2)(n+1)\left[nX^{n-1} - (n-1)X^{n-2}\right]$$

Or les racines de P'' sont 0 et 1. Comme 1 est racine de P et de P', mais pas de P''', 1 est racine triple (tandis que 0 n'est pas racine de P). Donc P possède pour racine triple 1.

2.b) Le polynôme $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$ correspond au polynôme P de la question précédente avec $n = 3$. On sait donc que 1 est racine triple de P. Donc $(X-1)^3$ divise P. On effectue la division euclidienne de P par $(X-1)^3$ et on trouve $P(X) = (X-1)^3(3X^2 + 4X + 3)$.

On calcule les racines de $Q(X) = 3X^2 + 4X + 3$. On trouve $z_1 = -\frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{5}}{3}$ et $z_2 = -\frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{5}}{3}$. La factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donc

$$P(X) = 3(X-1)^3(X + \frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{5}}{3})(X + \frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{5}}{3})$$

Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme Q est premier puisque de degré 2 sans racine réelle. La factorisation de P est donc $P(X) = (X-1)^3(3X^2 + 4X + 3)$.