Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Partiel du 29/10/2019
"Géométrie et systèmes dynamiques"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Avertissement : le sujet est très long (cf. barème à la fin)

Exercice 1. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose $E_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = c\}$.

1. Soit $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Montrer que l'ensemble E_c est une sous-variété non vide de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la dimension et l'expression du plan tangent en un point $(x, y, z) \in E_c$.
2. On veut montrer que, pour $c = 0$, E_0 n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposant que E_0 est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Rappeler la définition en terme de dérivées de courbes de l'espace tangent T_xM à une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ en un point $x \in M$.
   (b) Montrer que les points $(1, 0, 1)$ et $(1, 0, -1)$ appartiennent à l'espace tangent $T_{E_0}(0, 0, 0)$.
   (c) Montrer cependant que $(1, 0, 0)$ n'appartient pas à l'espace tangent $T_{E_0}(0, 0, 0)$.
   (Indication : on pourra vérifier que, si (I, γ) est une courbe paramétrée de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$ telle que $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ et $\gamma'(0) = (1, 0, 0)$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\gamma(t) \notin E_0$ pour $t \in]-\epsilon, \epsilon[\setminus\{0\}$).
   (d) Conclure.
3. Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. On suppose que $g(0) = 0$, $\nabla g(0) = 0$ et que la matrice Hessienne $H_g(0)$ de g en 0 est inversible. On rappelle que le lemme de Morse affirme alors qu'il existe deux voisinages U et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\phi : U \to V$ tels que $\phi(0) = 0$, $d\phi(0) = id$, avec $g \circ \phi(x) = \langle H_g(0)x, x\rangle$ pour tout $x \in U$ (où id est l'application identité de $\mathbb{R}^n$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$).
   On cherche à quelle condition l'ensemble $M := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\}$ est (quand même) une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Pour cela, on suppose que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et on note T_0M son espace tangent en 0.
   (a) Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que v est dans T_0M si et seulement si $\langle H_g(0)v, v\rangle = 0$.
   (b) En déduire que $T_0M = \{0\}$. Que peut-on dire de M ?

Exercice 2. Soit Γ l'ensemble des applications $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1 et $1-$périodiques, telles que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (autrement dit, l'arc paramétré $(\mathbb{R}, \gamma)$ est régulier et fermé). Par exemple, l'arc θ défini par $\theta(t) = (\cos(t), \sin(t)) = e^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, est dans Γ.

Etant donné $\gamma \in \Gamma$, on définit le nombre de tours $N(\gamma)$ de γ par

$$N(\gamma) = \tau(1) - \tau(0),$$

où $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est n'importe quelle application continue telle que

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (\cos(\tau(t)), \sin(\tau(t))) = e^{i\tau(t)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

On utilisera systématiquement la notation exponentielle et on identifiera le plan complexe à $\mathbb{R}^2$. Nous admettrons (jusqu'à la partie (4)) que $N(\gamma)$ est bien définie.

Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux éléments de Γ. On dit que γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes s'il existe une application continue $\sigma : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (avec $\sigma = \sigma_s(t)$, $s \in [0,1]$ et $t \in \mathbb{R}$) telle que $\sigma_0 = \gamma$, $\sigma_1 = \tilde{\gamma}$ et $\sigma_s \in \Gamma$ pour tout $s \in [0,1]$. L'objectif de l'exercice est de montrer que deux arcs de Γ sont homotopes, si et seulement si, ils ont même nombre de tours (théorème de Whitney-Graustein).

1. (Analyse du nombre de tours) Dans cette partie, on fixe $\gamma \in \Gamma$ et on veut étudier quelques propriétés de $N(\gamma)$.
   (a) Montrer que $N(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}$.
   (Indication : remarquer que, si $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est comme dans (1), alors $\cos(\tau(1)) = \cos(\tau(0))$ et $\sin(\tau(1)) = \sin(\tau(0))$).
   (b) Soient $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\tilde{\tau} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues vérifiant (1). Vérifier que $\tau - \tilde{\tau}$ est une fonction constante et en déduire que

   $$\tau(1) - \tau(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0).$$

   En particulier, le nombre de tours de γ est défini de façon non-ambigüe.
   (c) Soit $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue satisfaisant (1). Vérifier que $\tau(t+1) = \tau(t) + N(\gamma)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. (Egalité du nombre de tours de deux courbes homotopes) Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux éléments de Γ. On suppose que γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes, c'est-à-dire qu'il existe une application continue $\sigma : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, telle que $\sigma_0 = \gamma$, $\sigma_1 = \tilde{\gamma}$ et $\sigma_s \in \Gamma$ pour tout $s \in [0,1]$. On notera $\sigma'_s(t) = \partial_t \sigma_s(t)$. L'objectif de cette question est de montrer que $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma})$.
   (a) Pour tout $s \in [0,1]$, soit $\tau_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que

   $$\frac{\sigma'_s(t)}{\|\sigma'_s(t)\|} = e^{i\tau_s(t)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   On supposera, sans perte de généralité, que $\tau_s(0) \in [0, 2\pi[$ pour tout $s \in [0,1]$. (Délicat) Montrer que la famille de fonctions $(\tau_s)_{s\in[0,1]}$ est équicontinue sur $[0,1]$.
   (on pourra utiliser le fait que $|\arccos'(t)| \leq 1/\sqrt{2}$ ou $|\arcsin'(t)| \leq 1/\sqrt{2}$ pour tout t.)
   (b) Soit (s_n) une suite de $[0,1]$ qui tend vers $s \in [0,1]$. Déduire du théorème d'Ascoli [1] qu'il existe une suite extraite (s_{n_k}) et une fonction continue $\tau : [0,1] \to \mathbb{R}$, vérifiant

   $$\frac{\sigma'_s(t)}{\|\sigma'_s(t)\|} = e^{i\tau_s(t)} \qquad \forall t \in [0,1] \tag{2}$$

   et telles que $(\tau_{s_{n_k}})$ converge uniformément vers τ sur $[0,1]$.

1. On rappelle que le théorème d'Ascoli affirme que, si $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une famille équicontinue avec $(u_n(0))$ bornée, alors il existe une suite extraite (s_{n_k}) et une fonction continue $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que (u_{n_k}) converge uniformément vers u sur $[0,1]$.

(c) Montrer qu'il est possible de prolonger τ sur $\mathbb{R}$ de façon à ce que (2) soit vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que $(N(\gamma_{s_n}))$ converge vers $N(\gamma_s)$.

(d) Conclure que $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma})$.

3. (Homotopie de deux courbes avec même nombre de tours) Soient maintenant γ et $\tilde{\gamma}$ deux éléments de Γ tels que $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma})$. *On supposera également, pour simplifier, que γ et $\tilde{\gamma}$ sont paramétrés par abscisse curviligne et que* $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma}) \neq 0$. L'objectif de cette question est de montrer que γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes.

   Soient $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\tilde{\tau} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues telles que

$$\gamma'(t) = e^{i\tau(t)} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\gamma}'(t) = e^{i\tilde{\tau}(t)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   On pose

$$\tau_s(t) = (1-s)\tau(t) + s\tilde{\tau}(t) \qquad \forall (s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$$

   et

$$\sigma_s(t) = \int_0^t e^{i\tau_s(u)} du - t\int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du.$$

   (a) En utilisant le fait que $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma}) \neq 0$, montrer que, pour tout $s \in [0,1]$,

$$\left\| \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du \right\| < 1,$$

   où la norme $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne. (On pourra utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

   (b) Vérifier alors que $\sigma_s'(t) \neq 0$ pour tout $(s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

   (c) Montrer, en utilisant l'égalité $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma})$, que $t \to \sigma_s(t)$ est $1-$périodique.

   (d) Conclure alors que γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes.

   (Le résultat reste vrai, mais est un peu plus technique, si $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma}) = 0$).

4. (Existence du nombre de tours) Nous montrons finalement que, si $\gamma \in \Gamma$, alors il existe $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant (1). Fixons $\gamma \in \Gamma$. *Nous supposerons pour simplifier que γ est paramétrée par abscisse curviligne.*

   (a) Soit $\bar{t} \in \mathbb{R}$ et $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$ tels que $\gamma'(\bar{t}) = e^{i\bar{\tau}}$. Vérifier qu'il existe $\epsilon > 0$ et $\tau :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}$ tel que $\tau(\bar{t}) = \bar{\tau}$ et

$$\gamma'(t) = e^{i\tau(t)} \qquad \forall t \in]\bar{-}\epsilon, \bar{t} + \epsilon[.$$

   On fixe maintenant $\bar{\tau}_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\gamma'(0) = e^{i\bar{\tau}_0}$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (I, τ) tels que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\tau : I \to \mathbb{R}$ est continue et satisfait

$$\tau(0) = \bar{\tau}_0 \qquad \text{et} \qquad \gamma'(t) = e^{\tau(t)} \qquad \forall t \in I.$$

   (b) Montrer que, si (I, τ) et $(\tilde{I}, \tilde{\tau})$ sont dans $\mathcal{E}$, alors $\tau = \tilde{\tau}$ dans $I \cap \tilde{I}$.

   On définit alors $\bar{I} = \bigcup_{(I,\gamma) \in \mathcal{E}} I$ et on définit $\bar{\tau}(t) = \tau(t)$ si $(I, \gamma) \in \mathcal{E}$ et $t \in I$.

   (c) Montrer que $\bar{I}$ est égal à $\mathbb{R}$ et que $\bar{\tau}$ vérifie (1).

Barême indicatif : Exercice 1 = 10 points, Exercice 2 = 16,5 points.