Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Partiel du 29/10/2019
"Géométrie et systèmes dynamiques"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Avertissement : le sujet est très long (cf. barème à la fin)

Exercice 1. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose $E_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = c\}$.

1. Soit $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Montrer que l'ensemble E_c est une sous-variété non vide de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la dimension et l'expression du plan tangent en un point $(x, y, z) \in E_c$.
2. On veut montrer que, pour $c = 0$, E_0 n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposant que E_0 est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Rappeler la définition en terme de dérivées de courbes de l'espace tangent T_xM à une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ en un point $x \in M$.
   (b) Montrer que les points $(1, 0, 1)$ et $(1, 0, -1)$ appartiennent à l'espace tangent $T_{E_0}(0, 0, 0)$.
   (c) Montrer cependant que $(1, 0, 0)$ n'appartient pas à l'espace tangent $T_{E_0}(0, 0, 0)$. (Indication : on pourra vérifier que, si (I, γ) est une courbe paramétrée de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$ telle que $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ et $\gamma'(0) = (1, 0, 0)$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\gamma(t) \notin E_0$ pour $t \in]-\epsilon, \epsilon[\setminus\{0\}$).
   (d) Conclure.
3. Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. On suppose que $g(0) = 0$, $\nabla g(0) = 0$ et que la matrice Hessienne $H_g(0)$ de g en 0 est inversible. On rappelle que le lemme de Morse affirme alors qu'il existe deux voisinages U et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\phi : U \to V$ tels que $\phi(0) = 0$, $d\phi(0) = id$, avec $g \circ \phi(x) = \langle H_g(0)x, x\rangle$ pour tout $x \in U$ (où id est l'application identité de $\mathbb{R}^n$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$).
   On cherche à quelle condition l'ensemble $M := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\}$ est (quand même) une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Pour cela, on suppose que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et on note T_0M son espace tangent en 0.
   (a) Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que v est dans T_0M si et seulement si $\langle H_g(0)v, v\rangle = 0$.
   (b) En déduire que $T_0M = \{0\}$. Que peut-on dire de M ?

Solution :

1. *Soit $c \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in E_c$. Alors $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$ qui n'est nul que si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Or $(0, 0, 0)$ n'est pas dans E_c ce qui prouve (par caractérisation des sous-variétés en terme de submersion) que E_c est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension $3 - 1 = 2$. L'espace tangent en un point $(x, y, z) \in E_c$ est*

$$T_{(x,y,z)}E_c = Ker(\nabla g(x, y, z)) = \{(v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3,\ xv_x + yv_y - zv_z = 0\}.$$

2. (a) *L'espace tangent T_xM est l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels il existe une courbe paramétrée (I, γ) de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ avec $0 \in I$, $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$ et telle que $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in I$.*

   (b) *On considère les arcs paramétrés $(\mathbb{R}, \gamma_1)$ et $(\mathbb{R}, \gamma_2)$ définis par $\gamma_1(t) = (t, 0, t)$ et $\gamma_2(t) = (1, 0, -t)$. Alors*

$$g(\gamma_1(t)) = t^2 - t^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad g(\gamma_2(t)) = t^2 - (-t^2) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

   avec $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0, 0, 0)$. Donc $\gamma_1'(0) = (1, 0, 1)$ et $\gamma_2'(0) = (1, 0, -1)$ sont dans $T_{(0,0,0)}E_0$.

   (c) *Si $(1, 0, 0)$ appartient à $T_{(0,0,0)}E_0$, alors il existe une courbe paramétrée (I, γ) de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$ telle que $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ et $\gamma'(0) = (1, 0, 0)$ et $\gamma(t) \in E_0$ pour tout $t \in I$. Comme $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ et $\gamma'(0) = (1, 0, 0)$, on a*

$$\gamma(t) = (t, 0, 0) + t\epsilon(t)$$

   où $\epsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Donc

$$0 = g(\gamma(t)) = t^2 + t^2(2\epsilon_1(t) + \|\epsilon(t)\|^2)$$

   et alors

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} g(\gamma(t)) = 1,$$

   ce est impossible. Donc $(1, 0, 0)$ n'appartient pas à $T_{(0,0,0)}E_0$.

   (d) *Nous avons vu que les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(1, 0, -1)$ appartiennent à $T_{(0,0,0)}E_0$. Comme E_0 est supposé être une variété, $T_{(0,0,0)}E_0$ est un espace vectoriel, et on devrait également avoir que le vecteur $(1, 0, 0) = ((1, 0, 1) + (1, 0, -1))/2$ est dans $T_{(0,0,0)}E_0$. Or nous avons vu dans la question précédente que ce n'est pas le cas. On en déduit que E_0 n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.*

3. (a) *La difficulté est que $\nabla g(0) = 0$ et donc g n'est pas une submersion en 0. Pär contre cela n'exclut pas a priori que g soit une sous-variété, mais ne permet pas d'utiliser la caractérisation des variétés en terme de submersion. Revenons à la définition. Soit $v \in T_0M$. Alors il existe une courbe paramétrée (I, γ) telle que $0 \in I$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = v$ et $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in I$. Soient U et V et $\phi : U \to V$ comme définis dans l'énoncé et posons $\tilde{\gamma}(t) = \phi^{-1}(\gamma(t))$. On note que $\tilde{\gamma}(0) = \phi^{-1}(\gamma(0)) = \phi^{-1}(0) = 0$ et*

$$\tilde{\gamma}'(0) = d\phi^{-1}(\gamma(0))(\gamma'(0)) = (d\phi(0))^{-1}(\gamma'(0)) = \gamma'(0) = v$$

   car $d\phi(0) = I_d$. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\tilde{\gamma}(]-\epsilon, \epsilon[) \subset U$ car $\tilde{\gamma}(0) = 0$. Comme $g(\gamma(t)) = 0$ pour tout $t \in I$, on a $g \circ (\phi)(\tilde{\gamma}(t)) = 0$ pour tout $t \in I$. Mais alors

$$0 = g(\phi(\tilde{\gamma}(t)) = \langle H_g(0)\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}(t)\rangle.$$

   Par développement limité, on a

$$\tilde{\gamma}(t) = tv + t\epsilon(t),$$

   où $\epsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Donc

$$g(\phi(\tilde{\gamma}(t)) = \langle H_g(0)tv + t\epsilon(t), tv + t\epsilon(t)\rangle = t^2\langle H_g(0)v, v\rangle + t^2\epsilon_1(t),$$

où $\epsilon_1(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Mais alors

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} g(\phi(\tilde{\gamma}(t)) = \langle H_g(0)v, v\rangle.$$

Donc, si $v \in T_0M$, alors $\langle H_g(0)v, v\rangle = 0$.
Inversement, soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle H_g(0)v, v\rangle = 0$. Posons $\tilde{\gamma}(t) = tv$ pour $t \in \mathbb{R}$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\tilde{\gamma}(t) \in V$ pour tout $t \in I :=]-\epsilon, \epsilon[$. Posons alors $\gamma(t) = \phi(\tilde{\gamma}(t))$ et considérons l'arc paramétré (I, γ) : on a

$$g(\gamma(t)) = g(\phi(\tilde{\gamma}(t))) = \langle H_g(0)\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}(t)\rangle = t^2 \langle H_g(0)v, v\rangle = 0 \qquad \forall t \in I.$$

Cela prouve que $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in I$. De plus, $\gamma(0) = 0$ et $\gamma'(0) = d\phi(0)(\tilde{\gamma}'(0)) = v$. Donc $v \in T_0M$.
En conclusion, nous avons prouvé que v est dans T_0M si et seulement si $\langle H_g(0)v, v\rangle = 0$.

(b) *Montrons par l'absurde que $H_g(0)$ est définie positive ou définie négative. Si $H_g(0)$ n'est ni définie positive ou négative, alors $H_g(0)$ possède un vecteur propre w_1 associé à une valeur propre $\lambda_1 > 0$ et un vecteur propre w_2 associé à une valeur propre $\lambda_2 < 0$. Rappelons que w_1 et w_2 sont orthogonaux et orthogonaux pour $H_g(0)$. Donc*

$$\begin{aligned}\langle H_g(0)(w_1 + tw_2), (w_1 + tw_2)\rangle &= \langle H_g(0)w_1, w_1\rangle + t^2 \langle H_g(0)w_2, w_2\rangle \\ &= \lambda_1 \|w_1\|^2 + t^2 \lambda_2 \|w_2\|^2.\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $v^\pm = v_1 \pm \tau v_2$, avec $\tau = (-\lambda_1 \|w_1\|^2 / (\lambda_2 \|w_2\|^2)^{1/2}$ vérifient

$$\langle H_g(0)v^\pm, v^\pm\rangle = 0,$$

et donc appartiennent à T_0M. Mais alors, comme T_0M est un espace vectoriel, le vecteur $w_1 = (v^+ + v^-)/2$ est aussi dans T_0M, ce qui est impossible puisque

$$\langle H_g w_1, w_1\rangle = \lambda_1 \|w_1\|^2 > 0.$$

On en déduit que toutes les valeurs propres de $H_g(0)$ sont simultanément positives ou négatives. Donc $H_g(0)$ est définie positive ou négative, ce qui implique que l'équation $\langle H_g v, v\rangle = 0$ n'a pour solution que 0. D'où $T_0M = \{0\}$.
La dimension de M étant nulle (égale à la dimension de $\{0\}$), la variété M est réduite à des points isolés.

Exercice 2. Soit Γ l'ensemble des applications $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1 et $1-$périodiques, telles que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (autrement dit, l'arc paramétré $(\mathbb{R}, \gamma)$ est régulier et fermé). Par exemple, l'arc θ défini par $\theta(t) = (\cos(t), \sin(t)) = e^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, est dans Γ.

Etant donné $\gamma \in \Gamma$, on définit le nombre de tours $N(\gamma)$ de γ par

$$N(\gamma) = \tau(1) - \tau(0),$$

où $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est n'importe quelle application continue telle que

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (\cos(\tau(t)), \sin(\tau(t))) = e^{i\tau(t)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

On utilisera systématiquement la notation exponentielle et on identifiera le plan complexe à $\mathbb{R}^2$. Nous admettrons (jusqu'à la partie (4)) que $N(\gamma)$ est bien définie.

Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux éléments de Γ. On dit que γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes s'il existe une application continue $\sigma : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (avec $\sigma = \sigma_s(t)$, $s \in [0,1]$ et $t \in \mathbb{R}$) telle que $\sigma_0 = \gamma$, $\sigma_1 = \tilde{\gamma}$ et $\sigma_s \in \Gamma$ pour tout $s \in [0,1]$. L'objectif de l'exercice est de montrer que deux arcs de Γ sont homotopes, si et seulement si, ils ont même nombre de tours (théorème de Whitney-Graustein).

1. (Analyse du nombre de tours) Dans cette partie, on fixe $\gamma \in \Gamma$ et on veut étudier quelques propriétés de $N(\gamma)$.
   (a) Montrer que $N(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}$.
   (Indication : remarquer que, si $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est comme dans (1), alors $\cos(\tau(1)) = \cos(\tau(0))$ et $\sin(\tau(1)) = \sin(\tau(0))$).
   (b) Soient $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\tilde{\tau} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues vérifiant (1). Vérifier que $\tau - \tilde{\tau}$ est une fonction constante et en déduire que
   $$\tau(1) - \tau(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0).$$
   En particulier, le nombre de tours de γ est défini de façon non-ambigüe.
   (c) Soit $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue satisfaisant (1). Vérifier que $\tau(t+1) = \tau(t) + N(\gamma)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution :

(a) Comme $\gamma'(0) = \gamma'(1)$ par périodicité de γ, on a, par définition de τ :
$$\frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|} = e^{i\tau(0)} = \frac{\gamma'(1)}{\|\gamma'(1)\|} = e^{i\tau(1)}.$$
Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau(1) = \tau(0) + 2k\pi$, ce qui prouve que
$$N(\gamma) = \tau(1) - \tau(0) = 2k\pi.$$

(b) Soient $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\tilde{\tau} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues vérifiant (1). Notons que
$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = e^{i\tau(t)} = e^{i\tilde{\tau}(t)}.$$
Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{\tau}(t) = \tau(t) + 2k\pi$. Cela montre que la fonction continue $t \to \tilde{\tau}(t) - \tau(t)$ prend ses valeurs dans l'ensemble discret $2\pi\mathbb{Z}$, et est donc constante. En particulier,
$$\tilde{\tau}(0) - \tau(0) = \tilde{\tau}(1) - \tau(1),$$
et, en réorganisant,
$$\tau(1) - \tau(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0).$$

(c) Soit $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue satisfaisant (1). Par périodicité de γ, on a
$$\frac{\gamma'(t+1)}{\|\gamma'(t+1)\|} = e^{i\tau(t+1)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = e^{i\tau(t)}.$$
Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\tau(t+1) = \tau(t) + 2k\pi$. Cela montre que la fonction continue $t \to \tau(t+1) - \tau(t)$ prend ses valeurs dans l'ensemble discret $2\pi\mathbb{Z}$, et est donc constante. Mais alors, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\tau(t+1) - \tau(t) = \tau(1) - \tau(0) = N(\gamma).$$
Cela prouve l'égalité demandée.

2. (Egalité du nombre de tours de deux courbes homotopes) Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux éléments de Γ. On suppose que γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes, c'est-à-dire qu'il existe une application continue $\sigma : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, telle que $\sigma_0 = \gamma$, $\sigma_1 = \tilde{\gamma}$ et $\sigma_s \in \Gamma$ pour tout $s \in [0,1]$. On notera $\sigma'_s(t) = \partial_t \sigma_s(t)$. L'objectif de cette question est de montrer que $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma})$.

   (a) Pour tout $s \in [0,1]$, soit $\tau_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que

   $$\frac{\sigma'_s(t)}{\|\sigma'_s(t)\|} = e^{i\tau_s(t)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   On supposera, sans perte de généralité, que $\tau_s(0) \in [0, 2\pi[$ pour tout $s \in [0,1]$. (Délicat) Montrer que la famille de fonctions $(\tau_s)_{s\in[0,1]}$ est équicontinue sur $[0,1]$. (on pourra utiliser le fait que $|\arccos'(t)| \le \sqrt{2}$ ou $|\arcsin'(t)| \le \sqrt{2}$ pour tout t.)

   (b) Soit (s_n) une suite de $[0,1]$ qui tend vers $s \in [0,1]$. Déduire du théorème d'Ascoli [1] qu'il existe une suite extraite (s_{n_k}) et une fonction continue $\tau : [0,1] \to \mathbb{R}$, vérifiant

   $$\frac{\sigma'_s(t)}{\|\sigma'_s(t)\|} = e^{i\tau_s(t)} \qquad \forall t \in [0,1] \tag{2}$$

   et telles que $(\tau_{s_{n_k}})$ converge uniformément vers τ sur $[0,1]$.

   (c) Montrer qu'il est possible de prolonger τ sur $\mathbb{R}$ de façon à ce que (2) soit vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que $(N(\gamma_{s_n}))$ converge vers $N(\gamma_s)$.

   (d) Conclure que $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma})$.

   Solution :

   (a) Comme γ'_s est périodique, continue, et ne s'annule pas, l'application $t \to \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$ possède un module de continuité indépendant de $s \in [0,1]$: notons, pour $r > 0$,

   $$\omega(r) = \sup_{s\in[0,1], |t_1 - t_2| \le r} \left\| \frac{\gamma'_s(t_1)}{\|\gamma'_s(t_1)\|} - \frac{\gamma'_s(t_2)}{\|\gamma'_s(t_2)\|} \right\|.$$

   Alors $\omega(r) \to 0$ quand $r \to 0$. Notons $\sigma_s(t) = (\sigma_{s,1}(t), \sigma_{s,2}(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. La relation

   $$\frac{\sigma'_s(t)}{\|\sigma'_s(t)\|} = e^{i\tau(t)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   se réécrit

   $$\frac{\sigma'_{s,1}(t)}{\|\sigma'_s(t)\|} = \cos(\tau_s(t)), \qquad \frac{\sigma'_{s,2}(t)}{\|\sigma'_s(t)\|} = \sin(\tau_s(t)), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Comme $x \to \sin(x)$ a une dérivée non nulle (et minorée en valeur absolue par $1/2$) sur les ensembles de la forme $](k - 1/\sqrt{2})\pi, (k + 1/\sqrt{2})\pi[$ (où $k \in \mathbb{Z}$), on a sur tout intervalle ouvert I_1 de $\mathbb{R}$ où $\tau_s(t) \in](k - 1/\sqrt{2})\pi, (k + 1/\sqrt{2})\pi[$,

   $$\tau_s(t) = \arcsin\left(\frac{\sigma'_{s,2}(t)}{\|\sigma'_s(t)\|}\right) + k.$$

[1] On rappelle que le théorème d'Ascoli affirme que, si $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une famille équicontinue avec $(u_n(0))$ bornée, alors il existe une suite extraite (s_{n_k}) et une fonction continue $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que (u_{n_k}) converge uniformément vers u sur $[0,1]$.

Donc, pour tout $t_1, t_2 \in I_1$,

$$|\tau_s(t_1) - \tau_s(t_2)| \le \sup_{a \in](k-1/\sqrt{2})\pi, (k+1/\sqrt{2})\pi[} |\arcsin'(a)| \left| \frac{\sigma'_{s,2}(t_1)}{\|\sigma'_s(t_1)\|} - \frac{\sigma'_{s,2}(t_2)}{\|\sigma'_s(t_2)\|} \right|.$$

Or si $a \in](k-1/\sqrt{2})\pi, (k+1/\sqrt{2})\pi[$, on a $|\arcsin'(a)| \le \sqrt{2}$, ce qui prouve que

$$|\tau_s(t_1) - \tau_s(t_2)| \le \sqrt{2} \left| \frac{\sigma'_{s,2}(t_1)}{\|\sigma'_s(t_1)\|} - \frac{\sigma'_{s,2}(t_2)}{\|\sigma'_s(t_2)\|} \right| \le \sqrt{2}\omega(|t_2 - t_1|).$$

On peut montrer de même que sur tout intervalle de la forme $](k-1/2+1/\sqrt{2})\pi, (k+1/2-\sqrt{2})\pi[$ (où $k \in \mathbb{Z}$), $x \to \cos(x)$ a une dérivée minorée en valeur absolue par $1/2$. Donc sur tout intervalle ouvert I_2 où $\tau_s(t) \in](k-1/2+1/\sqrt{2})\pi, (k+1/2-\sqrt{2})\pi[$, on a de même, pour tout $t_1, t_2 \in I$,

$$|\tau_s(t_1) - \tau_s(t_2)| \le \sqrt{2}\omega(|t_2 - t_1|).$$

Un nombre fini d'intervalles (ouverts) de la forme I_1 ou de la forme I_2 recouvrant l'ensemble compact $[0,1]$, on en déduit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $|t_1 - t_2| \le \epsilon$ avec $t_1, t_2 \in [0,1]$,

$$|\tau_s(t_1) - \tau_s(t_2)| \le \sqrt{2}\omega(|t_2 - t_1|).$$

Donc la famille (τ_s) est bien équicontinue .

(b) *Comme la famille (τ_{s_n}) est équicontinue et bornée en $t = 0$ (car on a supposé que $\tau_s(0) \in [0, 2\pi[$), et comme $[0,1]$ est compact, on déduit du théorème d'Ascoli qu'il existe une suite extraite (s_{n_k}) et une fonction continue $\tau : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $(\tau_{s_{n_k}})$ converge vers τ uniformément sur $[0,1]$. Comme*

$$\frac{\sigma'_{s_{n_k}}(t)}{\|\sigma'_{s_{n_k}}(t)\|} = e^{i\tau_{s_{n_k}}(t)} \qquad \forall t \in [0,1],$$

on obtient, en passant à la limite :

$$\frac{\sigma'_s(t)}{\|\sigma'_s(t)\|} = e^{i\tau(t)} \qquad \forall t \in [0,1],$$

ce qui est le résultat demandé.

(c) *Nous définissons τ sur tout intervalle de la forme $[k, k+1]$ (où $k \in \mathbb{Z}$) en posant*

$$\tau(t) = \tau(t-k) + k(\tau(1) - \tau(0)).$$

Alors on montre facilement par récurrence que τ est continue sur $\mathbb{R}$, $1-$périodique, et vérifie (2) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc, par définition de $N(\gamma_s)$, on a

$$N(\gamma_s) = \tau(1) - \tau(0).$$

D'autre part, par convergence de $(\tau_{s_{n_k}})$ vers τ, on a aussi

$$\tau(1) - \tau(0) = \lim_{k \to +\infty} (\tau_{s_{n_k}}(1) - \tau_{s_{n_k}}(0)) = \lim_{k \to +\infty} N(\gamma_{s_{n_k}}).$$

Nous avons donc prouvé que, pour toute suite (s_n) qui tend vers s, il est possible d'extraire une suite (s_{n_k}) telle que $(N(\gamma_{s_{n_k}}))$ tend vers $N(\gamma_s)$. Cela prouve que

$$\lim_{s' \to s} N(\gamma_{s'}) = N(\gamma_s).$$

En particulier, $(N(\gamma_{s_n}))$ converge vers $N(\gamma_s)$.

(d) *Nous avons prouvé dans la question précédente que l'application $s \to N(\gamma_s)$ est continue. Comme elle est à valeurs dans l'ensemble discret $2\pi\mathbb{Z}$, elle est donc constante. On en déduit que*

$$N(\gamma) = N(\gamma_0) = N(\gamma_1) = N(\tilde{\gamma}).$$

3. (Homotopie de deux courbes avec même nombre de tours) Soient maintenant γ et $\tilde{\gamma}$ deux éléments de Γ tels que $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma})$. *On supposera également, pour simplifier, que γ et $\tilde{\gamma}$ sont paramétrés par abscisse curviligne et que $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma}) \neq 0$.* L'objectif de cette question est de montrer que γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes.
Soient $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\tilde{\tau} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues telles que

$$\gamma'(t) = e^{i\tau(t)} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\gamma}'(t) = e^{i\tilde{\tau}(t)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$\tau_s(t) = (1-s)\tau(t) + s\tilde{\tau}(t) \qquad \forall (s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$$

et

$$\sigma_s(t) = \int_0^t e^{i\tau_s(u)} du - t \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du.$$

(a) En utilisant le fait que $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma}) \neq 0$, montrer que, pour tout $s \in [0,1]$,

$$\left| \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du \right| < 1,$$

où la norme $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne. (On pourra utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

(b) Vérifier alors que $\sigma_s'(t) \neq 0$ pour tout $(s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

(c) Montrer, en utilisant l'égalité $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma})$, que $t \to \sigma_s(t)$ est $1-$périodique.

(d) Conclure alors que γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes.

(Le résultat reste vrai, mais est un peu plus technique, si $N(\gamma) = N(\tilde{\gamma}) = 0$).
Solution :

(a) *Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on a*

$$\left| \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du \right| \leq \left| \int_0^1 1^2 du \right|^{1/2} \left| \int_0^1 |e^{i\tau_s(u)}|^2 du \right|^{1/2} = 1.$$

Donc, en raisonnant par l'absurde, si on a

$$\left| \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du \right| \geq 1,$$

alors, il doit y avoir égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et donc les fonctions 1 et $u \to e^{i\tau_s(u)}$ sont proportionnelles. Cela signifie que la fonction $u \to e^{i\tau_s(u)}$ est constante. Alors l'application continue $u \to \tau_s(u)$ doit être également constante, ce qui implique que

$$0 = \tau_s(1) - \tau_s(0) = (1-s)(\tau(1) - \tau(0)) + s(\tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)) = (1-s)N(\gamma) + sN(\tilde{\gamma}) = N(\gamma)$$

puisque $N(\tilde{\gamma}) = N(\gamma)$. Cela contredit le fait que $N(\gamma) \neq 0$. Donc

$$\left| \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du \right| < 1.$$

(b) *Comme, pour tout* $(s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, *on a*

$$\sigma_s'(t) = e^{i\tau_s(t)} - \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du,$$

où

$$|e^{i\tau_s(t)}| = 1 > \left| \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du \right|,$$

on en déduit que $\sigma_s'(t) \neq 0$.

(c) *De plus, pour tout* $(s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
\sigma_s(t+1) &= \int_0^{t+1} e^{i\tau_s(u)} du - (t+1) \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du \\
&= \int_0^t e^{i\tau_s(u)} du + \int_t^{t+1} e^{i\tau_s(u)} du - (t+1) \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du \\
&= \tau_s(t) + \int_t^{t+1} e^{i\tau_s(u)} du - \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du.
\end{aligned}$$

Or, d'après la question (1.c),

$$\begin{aligned}
\tau_s(t+1) - \tau_s(t) &= (1-s)(\tau(t+1) - \tau(t)) + s(\tilde{\tau}(t+1) - \tilde{\tau}(t)) \\
&= (1-s)N(\gamma) + sN(\tilde{\gamma}) = N(\gamma)
\end{aligned}$$

puisque $N(\tilde{\gamma}) = N(\gamma)$. *Donc*

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+1} e^{i\tau_s(u)} du - \int_0^1 e^{i\tau_s(u)} du &= \int_1^{t+1} e^{i\tau_s(u)} du - \int_0^t e^{i\tau_s(u)} du \\
&= \int_0^t e^{i\tau_s(u+1)} du - \int_0^t e^{i\tau_s(u)} du \\
&= \int_0^t e^{i(\tau_s(u)+N(\gamma))} du - \int_0^t e^{i\tau_s(u)} du = 0,
\end{aligned}$$

puisque $N(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

(d) *Nous avons montré que l'application* $\sigma : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *est continue et vérifie* $\sigma_s \in \Gamma$ *pour tout* $s \in [0,1]$ *(puisque* σ_s *est* $1-$*périodique et vérifie* $\sigma_s'(t) \neq 0$*). De plus, par définition,* $\sigma_0 = \gamma$ *et* $\sigma_1 = \tilde{\gamma}$. *Donc* τ *est une homotopie entre* γ *et* $\tilde{\gamma}$, *qui sont donc homotopes.*

4. (Existence du nombre de tours) Nous montrons finalement que, si $\gamma \in \Gamma$, alors il existe $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant (1). Fixons $\gamma \in \Gamma$. *Nous supposerons pour simplifier que* γ *est paramétrée par abscisse curviligne.*

   (a) Soit $\bar{t} \in \mathbb{R}$ et $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$ tels que $\gamma'(\bar{t}) = e^{i\bar{\tau}}$. Vérifier qu'il existe $\epsilon > 0$ et $\tau :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}$ tel que $\tau(\bar{t}) = \bar{\tau}$ et

   $$\gamma'(t) = e^{i\tau(t)} \qquad \forall t \in]\bar{-}\epsilon, \bar{t} + \epsilon[.$$

   On fixe maintenant $\bar{\tau}_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\gamma'(0) = e^{i\bar{\tau}_0}$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (I, τ) tels que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\tau : I \to \mathbb{R}$ est continue et satisfait

   $$\tau(0) = \bar{\tau}_0 \qquad \text{et} \qquad \gamma'(t) = e^{i\tau(t)} \qquad \forall t \in I.$$

(b) Montrer que, si (I, τ) et $(\tilde{I}, \tilde{\tau})$ sont dans $\mathcal{E}$, alors $\tau = \tilde{\tau}$ dans $I \cap \tilde{I}$.

On définit alors $\bar{I} = \bigcup_{(I,\gamma)\in\mathcal{E}} I$ et on définit $\bar{\tau}(t) = \tau(t)$ si $(I, \gamma) \in \mathcal{E}$ et $t \in I$.

(c) Montrer que $\bar{I}$ est égal à $\mathbb{R}$ et que $\bar{\tau}$ vérifie (1).

Solution :

(a) *Soit $\bar{t} \in \mathbb{R}$ et $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$ tels que $\gamma'(\bar{t}) = e^{i\bar{\tau}}$. Si $\cos(\bar{\tau}) \neq 0$, i.e., si $\bar{\tau} \in](k-1/2)\pi, (k+1/2)\pi[$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$), alors par inversion locale l'application $x \to \sin(x)$ est localement inversible dans un voisinage V de $\bar{\tau}$ dans un voisinage U de $\sin(\bar{\tau}) = \gamma_1'(\bar{t})$. Notons, par abus de notation, $\sin^{-1} : U \to V$ cette application inverse. Par définition, $\sin^{-1}(\sin(\bar{\tau})) = \bar{\tau}$. Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\gamma_2(t) \in U$ pour tout $t \in]\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon[$ et posons, pour $t \in]\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon[$,*

$$\tau(t) = \sin^{-1}(\gamma_2'(t)).$$

Alors, par définition, on a bien $\sin(\tau(t)) = \gamma_2'(t)$ pour $t \in]\bar{t}-\epsilon, \bar{t}+\epsilon[$. De plus, quitte à restreindre encore ϵ, on peut supposer que $\cos(\tau(t))$ et $\gamma_1'(t)$ restent de (même) signe constant dans $]\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon[$ (puisque les deux quantités sont non nulles et égales en $\bar{t}$), et alors

$$\cos(\tau(t)) = (signe(\cos(t))(1 - \sin^2(\tau(t)))^{1/2} = (signe(\gamma_1'(t)))(1 - (\gamma_2'(t))^2)^{1/2} = \gamma_1'(t),$$

puisque $\|\gamma'(t)\| = 1$. Cela prouve que τ vérifie $\tau(\bar{t}) = \bar{\tau}$ et

$$\gamma'(t) = e^{i\tau(t)} \qquad \forall t \in]\bar{-}\epsilon, \bar{t} + \epsilon[.$$

(b) *Soient (I, τ) et $(\tilde{I}, \tilde{\tau})$ dans $\mathcal{E}$. Alors, pour tout $t \in I \cap \tilde{I}$, on a*

$$\gamma'(t) = e^{i\tau(t)} = e^{i\tilde{\tau}(t)}.$$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau(t) = \tilde{\tau}(t) + 2k\pi$. La fonction continue $\tilde{\tau} - \tau$ prend ses valeurs dans l'ensemble discret $2\pi\mathbb{Z}$ et est nulle en 0, donc elle est forcément nulle sur l'intervalle $I \cap \tilde{I}$.

(c) *Par définition, l'ensemble $\bar{I}$ est un intervalle ouvert (union d'intervalles ouverts contenant tous 0). Supposons que cet intervalle a une borne inférieure $\bar{t} \in \mathbb{R}$. Alors, puisque d'après la question (a) l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide et tout élément (I, τ) de $\mathcal{E}$ est tel que 0 appartient à l'intervalle ouvert I, on a $\bar{t} < 0$ et $\bar{\tau}$ est défini au moins sur $]-\bar{t}, 0]$. En utilisant des arguments similaires à ceux de la question (2.a) et la périodicité de γ, on peut montrer que τ est uniformément continue sur $]-\bar{t}, 0]$. Donc la limite*

$$\bar{\tau} := \lim_{s \to \bar{t}^+} \bar{\tau}(s)$$

existe et est finie. Par la question (a), on peut trouver $\epsilon > 0$ et $\tau :]\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon[$ tel que $\tau(\bar{t}) = \bar{\tau}$ et

$$\gamma'(t) = e^{i\tau(t)} \qquad \forall t \in]\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon[.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\bar{t}+\epsilon < 0$. Posons alors $\tilde{I} =]\bar{t}-\epsilon, \bar{t}+\epsilon[\cup \bar{I}$ et

$$\tilde{\tau}(t) = \begin{cases} \tau(t) & \text{si } t \in]\bar{t} - \epsilon, \bar{t}[\\ \bar{\tau}(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que $\tilde{\tau}$ *est continue car* $\tau(\bar{t}) = \lim_{t\to\bar{t}^+} \bar{\tau}(t)$*. Donc* $(\tilde{I}, \tilde{\tau})$ *appartient à* $\mathcal{E}$*, ce qui contredit la définition de* $\bar{t}$*. Donc la borne inférieure de l'intervalle* $\bar{I}$ *est*$-\infty$*. On montre de même que la borne supérieure de* $\bar{I}$ *est* $+\infty$*, ce qui prouve que* $\bar{I} = \mathbb{R}$*. Par définition,* $\bar{\tau}$ *vérifie* (1)*.*

Barême indicatif : Exercice 1 = 10 points, Exercice 2 = 16,5 points.