Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Examen du 15/01/2019
"Géométrie et systèmes dynamiques"
Durée 3h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1.

1. (Préliminaire) Dans cette première partie, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs de classe C^2. Pour $(t_0, x_0, \epsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, on considère la solution $x = x(t)$ de l'équation différentielle
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \epsilon) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
On suppose que x est définie sur tout $\mathbb{R}$ et on note $x(t) = \phi^{t_0}(t, x_0, \epsilon)$ le flot associé. Démontrer que ϕ est dérivable par rapport à ϵ et que $y(t) = \frac{\partial \phi^{t_0}(t,x_0,\epsilon)}{\partial \epsilon}$ vérifie l'équation différentielle :
$$\begin{cases} y'(t) = d_x f(t, x(t), \epsilon)(y(t)) + \frac{\partial f}{\partial \epsilon}(t, x(t), \epsilon) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$
(où $d_x f$ désigne la différentielle de $f = f(t, x, \epsilon)$ par rapport à x).
Indication : on pourra utiliser l'équation différentielle étendue (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$)
$$\begin{cases} (a, b)'(t) = (f(t, a(t), b(t)), 0) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ (a, b)(t_0) = (x_0, \epsilon). \end{cases}$$

2. Etant donnés $\xi > 0$ et $\epsilon \in \mathbb{R}$, on s'intéresse à l'équation différentielle
$$(EDO) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ x_2'(t) = x_1(t) - \epsilon((x_1(t))^2 - 1)x_2(t) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ x_1(0) = \xi, \ x_2(0) = 0 \end{cases}$$
On note $(X_1(t, \xi, \epsilon), X_2(t, \xi, \epsilon))$ cette solution et on admettra qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$. Le but de la suite de l'exercice est de montrer que pour tout ϵ assez proche de zéro, il existe une condition initiale $\xi = \xi(\epsilon)$ telle que la solution $t \mapsto (X_1(t, \xi, \epsilon), X_2(t, \xi, \epsilon))$ soit périodique.
   (a) Calculer $X_1(t, \xi, 0)$ et $X_2(t, \xi, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi > 0$.
   (b) En considérant l'application
$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, \xi, \epsilon) & \mapsto & \Phi(t, \xi, \epsilon) = X_2(t, \xi, \epsilon) \end{array}$$
   (qu'on admettra être de classe C^1), montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $]0, +\infty[\times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $T : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, tels que
$$T(\xi, 0) = 2\pi \text{ pour tout } \xi > 0 \text{ et } X_2(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon) = 0 \text{ pour tout } (\xi, \epsilon) \in \mathcal{V}.$$

(c) On note $P(\xi, \epsilon) = X_1(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon)$ pour $(\xi, \epsilon) \in \mathcal{V}$. Montrer que, si $P(\xi, \epsilon) = \xi$, alors l'équation différentielle (EDO) admet une solution périodique.

(d) Soit $\delta(\xi, \epsilon) = P(\xi, \epsilon) - \xi$. Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites pour en déduire l'existence de zéros de $\delta(\cdot, \epsilon)$ pour ϵ petit ?

(e) On pose $\Delta(\xi, \epsilon) = \frac{\delta(\xi,\epsilon)}{\epsilon}$ pour $\epsilon \neq 0$. En calculant la dérivée $\frac{\partial \delta}{\partial \epsilon}$, montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Delta(\xi, \epsilon) = \frac{\partial X_1}{\partial \epsilon}(2\pi, \xi, 0).$$

(f) En utilisant la question 1, vérifier que $\frac{\partial X_1}{\partial \epsilon}(2\pi, \xi, 0) = y_1(2\pi)$, où (y_1, y_2) est la solution de

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y_2'(t) = y_1(t) - \xi(\xi^2 \cos^2(t) - 1)\sin(t) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y_1(0) = y_2(0) = 0. \end{cases}$$

(g) En utilisant la formule de Duhamel, en déduire que

$$\frac{\partial X_1}{\partial \epsilon}(2\pi, \xi, 0) = \frac{\pi}{4}\xi(4 - \xi^2).$$

(h) On admet que Δ est de classe C^1. Montrer qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ et une application $\xi :]-\epsilon_0, \epsilon_0[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\xi(0) = 2$ et $\Delta(\xi(\epsilon), \epsilon) = 0$ pour tout $\epsilon \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[$.

(i) Conclure que l'équation différentielle (EDO) admet une solution périodique non nulle pour tout $\epsilon \in] - \epsilon_0, \epsilon_0[$.

Exercice 2. L'exercice s'intéresse aux lien entre équations différentielles et sous-variétés. Dans tout l'exercice (sauf la dernière question) M est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^d$. Etant donné un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1 à croissance au plus linéaire et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on note $t \to \phi^f(t, x_0)$ l'unique solution maximale de équation différentielle :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

1. Soient $x \in M$ et $v \in \mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe $v_n \to v$ et $h_n \to 0^+$ tels que $x + h_n v_n \in M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v \in T_x M$. (*Indication :* on pourra décrire M en terme de submersion).
2. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs de classe C^1 à croissance au plus linéaire. On dit que M est invariante par le flot associé à f, si, pour tout $x_0 \in M$, $\phi^f(t, x_0) \in M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Vérifier qu'alors $f(x) \in T_x M$ pour tout $x \in M$.
3. Soient maintenant $f_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $f_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ deux champs de vecteurs de classe C^2 à croissance au plus linéaire. On pose $\phi^1(t, x_0) = \phi^{f_1}(t, x_0)$ et $\phi^2(t, x_0) = \phi^{f_2}(t, x_0)$ pour simplifier. On suppose que M est invariante par les flots associés à f_1 et à f_2. Le crochet de Lie $[f_1, f_2]$ de f_1 et f_2 est le champ de vecteurs défini par

   $$[f_1, f_2](x) = df_2(x)(f_1(x)) - df_1(x)(f_2(x)), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

   L'objet de cette question est de montrer que $[f_1, f_2](x) \in T_x M$ pour tout $x \in M$. Pour $h > 0$ et $x \in M$, on définit successivement les points $x_h^1 = \phi^1(h, x)$, $x_h^2 = \phi^2(h, x_h^1)$, $x_h^3 = \phi^1(-h, x_h^2)$, $x_h^4 = \phi^2(-h, x_h^3)$.

(a) Montrer que $x_h^4 \in M$ pour tout $h > 0$.

(b) On suppose, dans cette question seulement, que f_1 et f_2 sont constants. Que vaut x_h^4 ?

(c) (Très calculatoire) Montrer que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{x_h^4 - x}{h^2} = [f_1, f_2](x).$$

(d) En déduire que $[f_1, f_2](x) \in T_x M$.

4. Montrer qu'il existe pas de sous-variété M de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 et invariante par les deux champs de vecteurs

$$f_1(x, y, z) = (1, 0, y), \qquad f_2(x, y, z) = (0, 1, 0).$$

Barème indicatif : Exercice 1 = 14 points, Exercice 2 = 8 points