Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Examen du 15/01/2019
"Géométrie et systèmes dynamiques"
Durée 3h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1.

1. (Préliminaire) Dans cette première partie, $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ est un champs de vecteurs de classe C^2. Pour $(t_0, x_0, \epsilon) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$, on considère la solution $x = x(t)$ de l'équation différentielle
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \epsilon) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
On suppose que x est définie sur tout $\mathbb{R}$ et on note $x(t) = \phi^{t_0}(t, x_0, \epsilon)$ le flot associé. Démontrer que ϕ est dérivable par rapport à ϵ et que $y(t) = \frac{\partial\phi^{t_0}(t,x_0,\epsilon)}{\partial\epsilon}$ vérifie l'équation différentielle :
$$\begin{cases} y'(t) = d_x f(t, x(t), \epsilon)(y(t)) + \frac{\partial f}{\partial\epsilon}(t, x(t), \epsilon) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$
(où $d_x f$ désigne la différentielle de $f = f(t, x, \epsilon)$ par rapport à x).
Indication : on pourra utiliser l'équation différentielle étendue (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$)
$$\begin{cases} (a, b)'(t) = (f(t, a(t), b(t)), 0) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ (a, b)(t_0) = (x_0, \epsilon). \end{cases}$$

2. Etant donnés $\xi > 0$ et $\epsilon \in \mathbb{R}$, on s'intéresse à l'équation différentielle
$$(EDO) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ x_2'(t) = x_1(t) - \epsilon((x_1(t))^2 - 1)x_2(t) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ x_1(0) = \xi,\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$
On note $(X_1(t, \xi, \epsilon), X_2(t, \xi, \epsilon))$ cette solution et on admettra qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Calculer $X_1(t, \xi, 0)$ et $X_2(t, \xi, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi > 0$.
   (b) En considérant l'application
$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, \xi, \epsilon) & \mapsto & \Phi(t, \xi, \epsilon) = X_2(t, \xi, \epsilon) \end{array}$$
   (qu'on admettra être de classe C^1), montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $]0, +\infty[\times\{0\}$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $T : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, tels que
$$T(\xi, 0) = 2\pi \text{ pour tout } \xi > 0 \text{ et } X_2(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon) = 0 \text{ pour tout } (\xi, \epsilon) \in \mathcal{V}.$$
   (c) On note $P(\xi, \epsilon) = X_1(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon)$ pour $(\xi, \epsilon) \in \mathcal{V}$. Montrer que, si $P(\xi, \epsilon) = \xi$, alors l'équation différentielle (EDO) admet une solution périodique.

(d) Soit $\delta(\xi,\epsilon) = P(\xi,\epsilon) - \xi$. Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites pour en déduire l'existence de zéros de $\delta(\cdot,\epsilon)$ pour ϵ petit ?

(e) On pose $\Delta(\xi,\epsilon) = \frac{\delta(\xi,\epsilon)}{\epsilon}$ pour $\epsilon \neq 0$. En calculant la dérivée $\frac{\partial \delta}{\partial \epsilon}$, montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Delta(\xi,\epsilon) = \frac{\partial X_1}{\partial \epsilon}(2\pi,\xi,0).$$

(f) En utilisant la question 1, vérifier que $\frac{\partial X_1}{\partial \epsilon}(2\pi,\xi,0) = y_1(2\pi)$, où (y_1,y_2) est la solution de

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y_2'(t) = y_1(t) - \xi(\xi^2\cos^2(t) - 1)\sin(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y_1(0) = y_2(0) = 0. \end{cases}$$

(g) En utilisant la formule de Duhamel, en déduire que

$$\frac{\partial X_1}{\partial \epsilon}(2\pi,\xi,0) = \frac{\pi}{4}\xi(4 - \xi^2).$$

(h) On admet que Δ est de classe C^1. Montrer qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ et une application $\xi :]-\epsilon_0,\epsilon_0[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\xi(0) = 2$ et $\Delta(\xi(\epsilon),\epsilon) = 0$ pour tout $\epsilon \in]-\epsilon_0,\epsilon_0[$.

(i) Conclure que l'équation différentielle (EDO) admet une solution périodique non nulle pour tout $\epsilon \in]-\epsilon_0,\epsilon_0[$.

Solution :

1. *On utilise l'indication et on considère le flot $\tilde{\phi}^{t_0}(t,x_0,\epsilon)$ de l'équation différentielle*

$$\begin{cases} (a,b)'(t) = (f(t,a(t),b(t)),0) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ (a,b)(t_0) = (x_0,\epsilon). \end{cases}$$

Notons que $b(t) = \epsilon$ pour tout t puisque $b'(t) = 0$. Donc la solution (a,b) du système étendu est égale à (x,ϵ), avec x solution de (EDO). Cela signifie donc que $\phi^{t_0}(t,x_0,\epsilon)$ est la projection sur les $d-$premières coordonnées de $\tilde{\phi}^{t_0}(t,x_0,\epsilon)$.

Comme l'application $(t,x,z) \to (f(t,x,z),0)$ est de classe C^2, on en déduit d'un théorème de cours que l'application $(x_0,\epsilon) \to \tilde{\phi}^{t_0}(t,x_0,\epsilon)$ est de classe C^1 et que, pour toute direction $(v,\eta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, la dérivée directionnelle $\tilde{y}(t) = (y(t),y_1(t)) = d_{(x_0,\epsilon)}\tilde{\phi}^{t_0}(t,x_0,\epsilon)(v,\eta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = (d_x f(t,a(t),b(t))(y(t)) + \frac{\partial f}{\partial \epsilon}(t,a(t),b(t))y_0(t))\ ,\ 0) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \tilde{y}(t_0) = (v,\eta). \end{cases}$$

Comme on veut calculer $\partial\phi/\partial\epsilon$, on est intéressé par la direction $(v,\eta) = (0,1)$. En tenant compte du fait que $a(t) = x(t)$ et $b(t) = \epsilon$, on a alors que $\tilde{y}(t) = (y(t),y_1(t)) = \frac{\partial}{\partial \epsilon}\tilde{\phi}^{t_0}(t,x(t),\epsilon)$ vérifie

$$\begin{cases} y'(t) = d_x f(t,x(t),z(t))(y(t)) + \frac{\partial f}{\partial \epsilon}(t,x(t),z(t))y_0(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y_1'(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = 0,\ y_1(t_0) = 1. \end{cases}$$

Donc $y_1(t) = 1$ pour tout t et y vérifie l'équation différentielle demandée.

2. (a) *Lorsque* $\epsilon = 0$, *l'équation est linéaire, avec pour matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *dont les valeurs propres sont* $\pm i$. *La résolvante de la matrice est donc* $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ *et la solution cherchée est donnée par* $e^{tA}\begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\cos(t) \\ \xi\sin(t) \end{pmatrix}$, *soit* $X_1(t,\xi,0) = \xi\cos(t)$ *et* $X_2(t,\xi,0) = \xi\sin(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\xi > 0$.

(b) *Comme* $\Phi(2\pi,\xi,0) = \sin(2\pi) = 0$ *et comme*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(2\pi,\xi,0) = \frac{\partial}{\partial t}X_2(t,\xi,0) = X_1(2\pi,\xi,0) = 2\pi \neq 0,$$

on déduit du théorème des fonctions implicites qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ *de* $(2\pi,\xi,0)$, *un voisinage ouvert* $\mathcal{V}$ *de* $(\xi,0)$ *et une application* $T : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *tels que, pour tout* $(t,\xi,\epsilon) \in \mathcal{U}$,

$$T(\xi,0) = 2\pi \text{ et } [X_2(t,\xi,\epsilon) = 0 \iff ((\xi,\epsilon) \in \mathcal{V} \text{ et } t = T(\xi,\epsilon))].$$

L'application T *vérifie alors les propriétés demandées :*

$$T(\xi,0) = 2\pi \text{ pour tout } \xi > 0 \text{ et } X_2(T(\xi,\epsilon),\xi,\epsilon) = 0 \text{ pour tout } (\xi,\epsilon) \in \mathcal{V}.$$

(c) *Si* $P(\xi,\epsilon) = X_1(T(\xi,\epsilon),\xi,\epsilon) = \xi$, *alors on a* $X_1(T(\xi,\epsilon),\xi,\epsilon) = \xi = X_1(0,\xi,\epsilon)$ *et* $X_2(T(\xi,\epsilon),\xi,\epsilon) = 0 = X_2(0,\xi,\epsilon)$. *Comme l'équation (EDO) ne dépend pas de* t, *on a par unicité des solutions d'une équation différentielle que*

$$(X_1(T(\xi,\epsilon)+t,\xi,\epsilon), X_2(T(\xi,\epsilon)+t,\xi,\epsilon)) = (X_1(t,\xi,\epsilon), X_2(t,\xi,\epsilon))$$

puisque les deux couples vérifient (EDO) sont égaux en $t = 0$. *Cela prouve l'existence d'une solution périodique à (EDO).*

(d) *Comme* $\delta(\xi,0) = \xi - \xi = 0$, *on a* $\frac{\partial\delta}{\partial\xi}(\xi,0) = 0$ *et donc on ne peut a priori pas utiliser le théorème des fonctions implicites pour avoir une équivalence de la forme* $\delta(\xi,\epsilon) = 0 \iff \xi = \xi(\epsilon)$.

(e) *On calcule la dérivée* $\frac{\partial\delta}{\partial\epsilon}$ *en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées :*

$$\frac{\partial\delta}{\partial\epsilon}(\xi,\epsilon) = \frac{\partial X_1}{\partial t}(T(\xi,\epsilon),\xi,\epsilon)\frac{\partial T}{\partial\epsilon}(\xi,\epsilon) + \frac{\partial X_1}{\partial\epsilon}(T(\xi,\epsilon),\xi,\epsilon).$$

Lorsque $\epsilon \to 0$, *on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\partial X_1}{\partial t}(T(\xi,\epsilon),\xi,\epsilon) = -X_2(2\pi,\xi,0) = 0.$$

D'après accroissements finis, pour tout ϵ *il existe* ϵ' *(avec* $|\epsilon'| \leq |\epsilon)$ *tel que*

$$\delta(\xi,\epsilon) = \delta(\xi,0) + \epsilon\frac{\partial\delta}{\partial\epsilon}(\xi,\epsilon').$$

Donc, comme $\delta(\xi,0) = 0$, *on en déduit que*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Delta(\xi,\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\delta(\xi,\epsilon) - \delta(\xi,0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon'\to 0}\frac{\partial\delta}{\partial\epsilon}(\xi,\epsilon') = \frac{\partial X_1}{\partial\epsilon}(2\pi,\xi,0).$$

(f) La question 1 dit que $y(t) = (y_1(t), y_2(t)) = \frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial\epsilon}(t,\xi,0)$ *est la solution de*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = -y_2(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y_2'(t) = y_1(t) - ((x_1(t))^2 - 1)x_2(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y_1(0) = y_2(0) = 0 \end{array}\right.$$

avec $(x_1(t), x_2(t)) = (X_1(t,\xi,0), X_2(t,\xi,0)) = (\xi\cos(t), \xi\sin(t))$*. Donc*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = -y_2(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y_2'(t) = y_1(t) - \xi(\xi^2\cos^2(t) - 1)\sin(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y_1(0) = y_2(0) = 0 \end{array}\right.$$

(g) Si on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, alors* $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ *et la formule de Duhamel dit que*

$$y(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} 0 \\ -\xi(\xi^2\cos^2(s) - 1)\sin(s) \end{pmatrix} ds$$

Donc

$$\begin{aligned} y_1(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \cos(2\pi - s) \times 0 - \sin(2\pi - s)(-\xi(\xi^2\cos^2(s) - 1)\sin(s))ds \\ &= -\int_0^{2\pi} \xi(\xi^2\cos^2(s) - 1)\sin^2(s)ds = -\xi^3\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2(2s)ds + \xi\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1 - \cos(2s))ds \\ &= -\xi^3\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}(1 - \sin(4s))ds + \xi\pi = -\frac{1}{4}\pi\xi^3 + \xi\pi = \frac{\pi}{4}\xi(4 - \xi^2). \end{aligned}$$

Cela montre donc que

$$\frac{\partial X_1}{\partial\epsilon}(2\pi,\xi,0) = \frac{\pi}{4}\xi(4 - \xi^2).$$

(h) Comme, par hypothèse, Δ *est de classe* C^1 *et vérifie*

$$\Delta(2,0) = \frac{\partial X_1}{\partial\epsilon}(2\pi,2,0) = 0$$

et

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\xi}(2,0) = -2\pi \neq 0,$$

on déduit du théorème des fonctions implicites qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ *et une application* $\xi :]-\epsilon_0,\epsilon_0[\to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *telle que* $\xi(0) = 2$ *et* $\Delta(\xi(\epsilon),\epsilon) = 0$ *pour tout* $\epsilon \in]-\epsilon_0,\epsilon_0[$*.*

(i) D'après la question (2c) et le fait que $\delta(\xi(\epsilon),\epsilon) = \xi(\epsilon)$ *par définition de* Δ*, on en déduit que l'équation différentielle (EDO) admet une solution périodique non nulle pour tout* $\epsilon \in]-\epsilon_0,\epsilon_0[$ *: c'est la solution partant du point* $(\xi(\epsilon), 0)$*.*

Exercice 2. L'exercice s'intéresse aux lien entre équations différentielles et sous-variétés. Dans tout l'exercice (sauf la dernière question) M est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^d$. Etant donné un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1 à croissance au plus linéaire, on note $t \to \phi^f(t,x_0)$ l'unique solution maximale de équation différentielle :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = f(x(t)) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0. \end{array}\right.$$

1. Soient $x \in M$ et $v \in \mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe $v_n \to v$ et $h_n \to 0^+$ tels que $x+h_n v_n \in M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v \in T_xM$. (*Indication :* on pourra décrire M en terme de submersion).
2. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs de classe C^1 à croissance au plus linéaire. On dit que M est invariante par le flot associé à f, si, pour tout $x_0 \in M$, $\phi^f(t, x_0) \in M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Vérifier qu'alors $f(x) \in T_xM$ pour tout $x \in M$.
3. Soient maintenant $f_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $f_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ deux champs de vecteurs de classe C^2 à croissance au plus linéaire. On pose $\phi^1(t, x_0) = \phi^{f_1}(t, x_0)$ et $\phi^2(t, x_0) = \phi^{f_2}(t, x_0)$ pour simplifier. On suppose que M est invariante par les flots associés à f_1 et à f_2. Le crochet de Lie $[f_1, f_2]$ de f_1 et f_2 est le champs de vecteurs défini par

$$[f_1, f_2](x) = df_2(x)(f_1(x)) - df_1(x)(f_2(x)), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

   L'objet de cette question est de montrer que $[f_1, f_2](x) \in T_xM$ pour tout $x \in M$. Pour $h > 0$ et $x \in M$, on définit successivement les points $x_h^1 = \phi^1(h, x)$, $x_h^2 = \phi^2(h, x_h^1)$, $x_h^3 = \phi^1(-h, x_h^2)$, $x_h^4 = \phi^2(-h, x_h^3)$.
   (a) Montrer que $x_h^4 \in M$ pour tout $h > 0$.
   (b) On suppose, dans cette question seulement, que f_1 et f_2 sont constants. Que vaut x_h^4 ?
   (c) (Très calculatoire) Montrer que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{x_h^4 - x}{h^2} = [f_1, f_2](x).$$

   (d) En déduire que $[f_1, f_2](x) \in T_xM$.
4. Montrer qu'il existe pas de sous-variété M de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 et invariante par les deux champs de vecteurs

$$f_1(x, y, z) = (1, 0, y), \qquad f_2(x, y, z) = (0, 1, 0).$$

Solution :

1. *Soient $x \in M$ et $v \in \mathbb{R}^d$. On décrit M en termes de submersion : il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x dans $\mathbb{R}^d$ et une submersion $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{d-m}$ tels que $\phi(x) = 0$ et*

$$M \cap \mathcal{U} = \phi^{-1}(\{0\}).$$

   On sait alors que $T_xM = Ker(d\phi(x))$. Comme, par hypothèse, $x+h_n v_n \in M$ avec $v_n \to v$ et $h_n \to 0^+$, on a $x + h_n v_n \in \mathcal{U} \cap M$ pour tout n assez grand et donc $\phi(x + h_n v_n) = 0$. Or, comme ϕ est C^1,

$$0 = \phi(x + h_n v_n) = \phi(x) + h_n d\phi(x)(v_n) + h_n\epsilon(h_n) = h_n d\phi(x)(v_n) + h_n\epsilon(h_n),$$

   puisque $\phi(x) = 0$, avec $\epsilon(h_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. On divise par h_n et on passe à la limite pour obtenir $d\phi(x)(v)$. Donc $v \in Ker(d\phi(x)) = T_xM$.
2. *Soit $x \in M$ et posons $\gamma(t) = \phi^f(t, x)$. Comme M est invariante par le flot associé à f, on a $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, γ est C^1 et $\gamma(0) = x$. Alors, par définition de T_xM, on a $\gamma'(0) \in T_xM$. Or*

$$\gamma'(0) = \frac{d}{dt}\phi^f(0, x) = f(\phi^f(0, x)) = f(x),$$

   puisque $\gamma = \phi^f(\cdot, x)$ est solution de l'équation différentielle. Cela montre que $f(x) \in T_xM$.

3. (a) *Fixons $h > 0$. Comme M est stable par le flot associé à f_1 et comme $x \in M$, on a $x_h^1 = \phi^1(h, x) \in M$. De même, comme M est stable par le flot associé à f_2 et comme $x_h^1 \in M$, on a $x_h^2 = \phi^2(h, x_h^1)$. On répète le même argument pour x_h^3 et x_h^4, ce qui montre que $x_h^4 \in M$ pour tout $h > 0$.*

   (b) *Si f_1 et f_2 sont constants, alors $\phi^1(t, x) = x + tf_1$ et $\phi^2(t, x) = x + tf_2$. Donc $x_h^1 = x+hf_1$, $x_h^2 = x+t(f_1+f_2)$, $x_h^3 = x+h(f_1+f_2)-f_1 = x+hf_2$ et $x_h^4 = x+hf_2-hf_2$, soit $x_h^4 = x$.*

   (c) *Posons $x(t) = \phi^1(t, x)$. Alors $x(0) = x$, $x'(t) = f_1(x(t))$ et, en dérivant cette équation, $x''(t) = df_1(x(t))(x'(t)) = df_1(x(t))(f_1(x(t)))$. Donc, par développement limité on a*

$$x(t) = x + tf_1(x) + \frac{t^2}{2} df_1(x)(x)(f_1(x)) + t^2\epsilon(t),$$

où $\epsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. On a bien sûr la même relation pour f_2. On en déduit (avec un peu de patience) que

$$x_h^1 = \phi^1(h, x) = x + hf_1(x) + \frac{h^2}{2} df_1(x)(f_1(x)) + h^2\epsilon(h),$$

$$\begin{aligned}
x_h^2 = \phi^2(h, x_h^1) &= x_h^1 + hf_2(x_h^1) + \frac{h^2}{2} df_2(x_h^1)(f_2(x_h^1)) + h^2\epsilon(h) \\
&= x + hf_1(x) + \frac{h^2}{2} df_1(x)(f_1(x)) + h(f_2(x) + hdf_2(x)(f_1(x))) + \frac{h^2}{2} df_2(x)(f_2(x)) + h^2\epsilon(h) \\
&= x + h(f_1(x) + f_2(x)) + \frac{h^2}{2}(df_1(x)(f_1(x)) + 2df_2(x)(f_1(x)) + df_2(x)(f_2(x))) + h^2\epsilon(h),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_h^3 = \phi^1(-h, x_h^2) &= x_h^2 - hf_1(x_h^2) + \frac{h^2}{2} df_1(x_h^2)(f_1(x_h^1)) + h^2\epsilon(h) \\
&= x + h(f_1(x) + f_2(x)) + \frac{h^2}{2}(df_1(x)(f_1(x)) + 2df_2(x)(f_1(x)) + df_2(x)(f_2(x))) \\
&\qquad - h(f_1(x) + hdf_1(x)(f_1(x) + f_2(x))) + \frac{h^2}{2} df_1(x)(f_1(x)) + h^2\epsilon(h) \\
&= x + hf_2(x) + \frac{h^2}{2}(-2df_1(x)(f_2(x)) + 2df_2(x)(f_1(x)) + df_2(x)(f_2(x))) + h^2\epsilon(h),
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
x_h^4 = \phi^2(-h, x_h^3) &= x_h^3 - hf_2(x_h^3) + \frac{h^2}{2} df_2(x_h^3)(f_2(x_h^3)) + h^2\epsilon(h) \\
&= x + hf_2(x) + \frac{h^2}{2}(-2df_1(x)(f_2(x)) + 2h^2 df_2(x)(f_1(x)) + df_2(x)(f_2(x))) \\
&\qquad - h(f_2(x) + hdf_2(x)(f_2(x))) + \frac{h^2}{2} df_2(x)(f_2(x)) + h^2\epsilon(h) \\
&= x + h^2(-df_1(x)(f_2(x)) + h^2 df_2(x)(f_1(x))) + h^2\epsilon(h) = x + h^2[f_1, f_2](x) + h^2\epsilon(h).
\end{aligned}$$

Cela montre que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{x_h^4 - x}{h^2} = [f_1, f_2](x).$$

(d) *Comme* $x_h^4 \in M$ *pour tout* h *et* $x_h^4 = x + h^2[f_1, f_2](x) + h^2\epsilon(h)$, *on a, en utilisant la question 1 de l'exercice que* $[f_1, f_2](x) \in T_xM$.

4. *On raisonne par l'absurde en supposant qu'une telle sous-variété* M *existe. Soit* $(x, y, z) \in M$. *Comme* M *est invariante par les deux champs de vecteurs* f_1 *et* f_2, *on a*

$$(1, 0, y) \in T_{(x,y,z)}M \text{ et } (0, 1, 0) \in T_{(x,y,z)}M$$

D'autre part, comme f_2 *est constant et* $df_1(x, y, z)(v_x, v_y, v_z) = (0, 0, v_y)$, *on a*

$$[f_1, f_2](x, y, z) = df_2(x, y, z)(f_1(x, y, z)) - df_1(x, y, z)(f_2(x, y, z)) = -(0, 0, 1)$$

et donc $-(0, 0, 1) = [f_1, f_2](x, y, z) \in T_{(x,y,z)}M$ *par la question précédente. Comme la famille* $\{(1, 0, y), (0, 1, 0), -(0, 0, 1)\}$ *engendre* $\mathbb{R}^3$, $T_{(x,y,z)}M$ *doit être égal à* $\mathbb{R}^3$, *ce qui contredit le fait que* M *est une sous-variété de dimension 2. Donc une telle sous-variété n'existe pas.*

Barème indicatif : *Exercice 1 = 14 points, Exercice 2 = 8 points*