Partiel du 26 Mars 2015
“Optimisation et programmation dynamique”

Master mention Mathématiques appliquées 1ère année
Université Paris Dauphine

Dans tout le partiel, on note $\Pi_K(x)$ la projection orthogonale d'un point x de $\mathbb{R}^n$ sur un convexe fermé non vide K de $\mathbb{R}^n$. Si $y=(y_i)_{i=1,\ldots,m}$ et $z=(z_i)_{i=1,\ldots,m}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$, on écrit $y\leq z$, si et seulement si, $y_i\leq z_i$ pour tout $i=1,\ldots,m$.

Exercice 1. On cherche à résoudre le problème

$$(\mathcal{P})\qquad \min_{(x,y,z)\in K} x^2+y^2+z^2 \qquad \text{où} \qquad K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1 \text{ et } x^2+y^2\leq 1\}\ .$$

1. Montrer que le problème admet une unique solution.
2. Montrer que la contrainte est qualifiée en tout point.
3. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème et en déduire la solution du problème $(\mathcal{P})$.
4. Retrouver la solution du problème $(\mathcal{P})$ par la méthode de dualité.

Exercice 2.

1. Soient $n,m\in\mathbb{N}^*$, C une matrice réelle de taille $m\times n$ et $d\in\mathbb{R}^m$. On suppose que l'ensemble $K:=\{x\in\mathbb{R}^n,\ Cx\leq d\}$ est non vide.
   Soit $x,y\in\mathbb{R}^n$. Montrer que $y=\Pi_K(x)$, si et seulement si, il existe $\lambda\in\mathbb{R}^m$ avec $\lambda\geq 0$, $y-x+C^T\lambda=0$ et $\lambda^T(Cy-d)=0$ (où C^T est la transposée de la matrice C).
   (Indication : Ecrire les conditions nécessaires du problème d'optimisation satisfait par $\Pi(x)$).
2. Soient $m_1,m_2\in\mathbb{N}^*$, C_1, C_2 deux matrices réelles de taille respectives $m_1\times n$ et $m_2\times n$, $d_1\in\mathbb{R}^{m_1}$ et $d_2\in\mathbb{R}^{m_2}$. On suppose que les ensembles $K_1:=\{x\in\mathbb{R}^n,\ C_1x\leq d_1\}$ et $K_2:=\{x\in\mathbb{R}^n,\ C_2x\leq d_2\}$ ont une intersection non vide.
   Démontrer en utilisant la question précédente que, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$,
   $$\Pi_{K_1}\circ\Pi_{K_2}(x)=\Pi_{K_1\cap K_2}(x).$$

Exercice 3. Soient C_1 et C_2 deux convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ d'intersection non vide. On suppose qu'on sait effectuer numériquement la projection Π_{C_1} et Π_{C_2} sur les ensembles C_1 et C_2. On cherche à trouver un point de $C_1\cap C_2$.

Pour $\tau\in]0,2[$ un paramètre fixé et $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ une position initiale donnée, on définit l'algorithme

$$\begin{array}{l} x_0=\bar{x}\\ x_{n+1/2}=x_n+\tau\left(\Pi_{C_1}(x_n)-x_n\right)\qquad (n\in\mathbb{N})\\ x_{n+1}=x_{n+1/2}+\tau\left(\Pi_{C_2}(x_{n+1/2})-x_{n+1/2}\right)\qquad (n\in\mathbb{N})\end{array}$$

1. Montrer que, si C est un convexe fermé non vide, $x\in C$ et $y\in\mathbb{R}^n$, alors :
   $$\|y+\tau\left(\Pi_C(y)-y\right)-x\|^2\leq\|y-x\|^2-\tau(2-\tau)\left\|\Pi_C(y)-y\right\|^2.$$
2. En déduire que, pour tout $x\in C_1\cap C_2$, on a :
   $$\|x_{n+1}-x\|^2\leq\|x_n-x\|^2-\tau(2-\tau)\left(\left\|\Pi_{C_2}(x_{n+1/2})-x_{n+1/2}\right\|^2+\|\Pi_{C_1}(x_n)-x_n\|^2\right).$$
3. Montrer alors que, pour tout $x\in C_1\cap C_2$, la suite $(\|x_n-x\|^2)$ converge et vérifier que la suite (x_n) est bornée.
4. Montrer que toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) appartient à $C_1\cap C_2$.