Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Examen du 15/01/2020
“Optimisation et programmation dynamique”
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. Dans cet exercice, on résout de deux façons différentes le même problème. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère le problème suivant (dans $\mathbb{R}^N$) :
$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{N} (1-x_i)^2 \text{ sous contraintes } \sum_{i=1}^{N} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ \forall i = 1, \dots, N \right\}$$
   (a) Montrer que le problème possède une et une seule solution.
   (b) Expliquer pourquoi la contrainte est qualifiée en tout point.
   (c) Soit $(x_1, \dots, x_N)$ un minimum du problème. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité.
   (d) En utilisant le fait qu'il existe une seule solution au problème, calculer cette solution.
2. Pour $y \geq 0$ et $N \geq 1$, on considère maintenant le problème
$$V_N(y) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{N} (1-x_i)^2, \text{ sous contraintes } \sum_{i=1}^{N} x_i = y,\ x_i \geq 0\ \forall i = 1 \dots, N \right\}.$$
   (a) En s'inspirant du principe de programmation dynamique, écrire une relation de récurrence entre V_N et V_{N-1} pour $N \geq 2$ (on ne demande pas de justification).
   (b) En déduire $V_N(y)$ pour tout $y \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Pour $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ donnés, on s'intéresse au problème de contrôle optimal :
$$\inf \left\{ \int_0^T e^{-s} u^2(s) ds + x(T), \qquad \text{où } x(0) = x,\ x'(t) = x(t) + u(t),\ u(t) \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Calculer le Hamiltonien $H(t, x, p)$ du problème.
2. Trouver tous les couples $(x(\cdot), u(\cdot))$ vérifiant le principe du maximum de Pontryagin.

Exercice 3. On se donne $A, B \in \mathbb{R}$ et $L : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (on écrira $L = L(t, x, p)$). On considère le problème de calcul des variations
$$\min \left\{ \int_0^t L(s, x(s), x'(s)) ds,\ \text{où } t > 0,\ x \in \mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R}),\ x(0) = A,\ x(t) = B \right\},$$

(attention ! bien noter que l'on minimise sur x et sur t). On rappelle que, si $t>0$ est fixé, l'application $f_t : \mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_t(x) = \int_0^t L(s,x(s),x'(s))ds \qquad \forall x \in \mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R})$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R})$ avec

$$df_t(x)(w) = \int_0^t \left(\frac{\partial L}{\partial x}(s,x(s),x'(s))w(s) + \frac{\partial L}{\partial p}(s,x(s),x'(s))w'(s)\right) ds, \qquad \forall x,w \in \mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R}).$$

On suppose que le couple $(T,x) \in]0,+\infty[\times\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$ est un point de minimum du problème.

1. Expliquer pourquoi x vérifie la condition d'Euler

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial p}(s,x(s),x'(s)) = \frac{\partial L}{\partial x}(s,x(s),x'(s)) \qquad \forall s \in [0,T].$$

2. On définit $\tilde{x}(s)$ sur $[0,T+1]$ par $\tilde{x}(s) = x(s)$ si $s\in[0,T]$ et $\tilde{x}(s) = x(T) + (s-T)x'(T)$ sur $[T,T+1]$. Pour $w \in \mathcal{C}^1([0,T+1],\mathbb{R})$ avec $w(0)=0$, on définit l'application $\Phi :]0,T+1[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ par

$$\Phi(t,\lambda) = \left(\int_0^t L(s,\tilde{x}(s)+\lambda w(s),\tilde{x}'(s)+\lambda w'(s))ds, \tilde{x}(t)+\lambda w(t)\right).$$

   On admettra que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Exprimer $\Phi(T,0)$ et la différentielle $d\Phi(T,0)$ de Φ en $(T,0)$ en fonction de T, B, L, x et w et de leurs dérivées.

3. Montrer que $d\Phi(T,0)$ ne peut pas être inversible (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème d'inversion locale pour contredire l'optimalité de (T,x))

4. En utilisant l'équation d'Euler vérifiée par x, déduire de la question précédente que

$$L(T,x(T),x'(T)) = \frac{\partial L}{\partial p}(T,x(T),x'(T))x'(T).$$

5. (Application) On considère le problème

$$\min\left\{\int_0^t (\frac{1}{2}(x'(s))^2+1)ds,\ \text{où } t>0,\ x\in\mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R}),\ x(0)=0,\ x(t)=1\right\},$$

   et admet un point de minimum $(T,x) \in]0,+\infty[\times\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$. En utilisant les questions 1 et 4, déterminer le couple (T,x).

Barème indicatif : Exercice 1 = 8 points, Exercice 2 = 4 points, Exercice 3 = 8 points.

Quelques rappels de cours

1. **Problèmes en temps discret**
Nous considérons le problème en horizon fini

$$V(p,x) = \inf_{\mathbf{u}_p \in \mathbb{U}_p} \sum_{n=p}^{N-1} L_n(x_n, u_n) + g(x_N)$$

où l'état $\mathbf{x}_p = (x_n)_{n=p}^N$ est défini par récurrence par

$$\begin{cases} x_p = \bar{x} \\ x_{n+1} = f_n(x_n, u_n), \qquad n = p,\ p+1, \dots,\ N-1. \end{cases}$$

Théorème 0.1 (Programmation dynamique)**.** *Pour tout $x \in X$, on a*

$$\begin{cases} V(p,x) & = \inf_{u \in U_p} \{L_p(x,u) + V(p+1, f_p(x,u))\}, \quad \forall p \in \{0, \dots, N-1\} \\ V(N,x) & = g(x). \end{cases}$$

Supposons qu'il existe $u_n^*(x)$ un "feedback optimal" vérifiant

$$L_n(x, u_n^*(x)) + V(n+1, f_n(x, u_n^*(x))) = \inf_{u \in U_n} \{L_n(x,u) + V(n+1, f_n(x,u))\}.$$

Proposition 0.1. *Soit $\bar{x} \in X$ une condition initiale fixée. Si on définit par récurrence les suites $(\bar{u}_n)$ et $(\bar{x}_n)$ par*

$$\bar{x}_0 = \bar{x}, \qquad \bar{u}_n = u_n^*(\bar{x}_n), \qquad \bar{x}_{n+1} = f_n(\bar{x}_n, \bar{u}_n),$$

alors la suite $(\bar{u}_n)$ est optimale pour le problème de contrôle discret, i.e.,

$$V(0, \bar{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} L_n(\bar{x}_n, \bar{u}_n) + g(\bar{x}_N).$$

2. **Calcul des variations**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A, B \in \mathbb{R}^N$. On considère le problème de minimisation sans contrainte sur l'espace $X = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^N)$:

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in X,\ x(a)=A,\ x(b)=B} \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt\ .$$

Théorème 0.2 (Equation d'Euler)**.** *Si $L = L(t,x,p)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et si la fonction $x \in X$ est un minimum du problème $(\mathcal{P})$, alors la fonction $t \to \frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) \qquad \forall t \in [a,b]\ .$$

3. **Contrôle optimal**
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ une condition initiale fixée. On considère le problème de contrôle optimal :

$$\inf_{u(\cdot)} \int_0^T L(t, x(t), u(t))\ dt + g(x(T))$$

sous la contrainte que $u : [0,T] \to U$ est mesurable et que $x(\cdot)$ est l'unique solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On définit le *Hamiltonien du système* $H : [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par

$$H(t,x,p) = \sup_{u \in U} \left\{ -\langle p, f(t,x,u) \rangle - L(t,x,u) \right\}.$$

On suppose que H est de classe C^1.

Théorème 0.3 (Principe du maximum)**.** *Si (x^*, u^*) est optimal dans le problème ci-dessus, alors il existe une application $p^* : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 telle que le couple (x^*, p^*) vérifie le système*

$$\begin{cases} \dot{x^*}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial p}(t, x^*(t), p^*(t)), & t \in [0,T] \\ \dot{p}^*(t) = \dfrac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), p^*(t)), & t \in [0,T] \\ x(0) = x_0, \ p^*(T) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*(T)). \end{cases}$$

De plus

$$-\langle p^*(t), f(t, x^*(t), u^*(t)) \rangle - L(t, x^*(t), u^*(t)) = H(t, x^*(t), p^*(t)) \qquad t \in [0,T].$$

On définit la fonction valeur $V : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par

$$V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot)} \int_{t_0}^{T} L(t, x(t), u(t)) \, dt + g(x(T) \tag{1}$$

sous la contrainte que $u : [0,T] \to U$ est mesurable et que $x(\cdot)$ est l'unique solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [t_0,T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Théorème 0.4. *On a, pour tout $0 \leq t_0 < t_1 \leq T$,*

$$V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) \, dt + V(t_1, x(t_1))$$

sous la contrainte que le couple $(x(\cdot), u(\cdot))$ vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [t_0,t_1] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Théorème 0.5 (de vérification)**.** *Supposons que*

(a) $W : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $]0,T[\times \mathbb{R}^N$ et C^0 sur $[0,T] \times \mathbb{R}^N$,

(b) W satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial W}{\partial t}(t,x) + H(t, x, \dfrac{\partial W}{\partial x}(t,x)) = 0 & \forall (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ W(T,x) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

(c) il existe une application continue $\tilde{u}^* : (0,T) \times \mathbb{R}^N \to U$ telle que, pour tout $(t,x) \in]0,T[\times \mathbb{R}^N$,

$$-\langle \frac{\partial W}{\partial x}(t,x), f(t, x, \tilde{u}^*(t,x)) \rangle - L(t, x, \tilde{u}^*(t,x)) = H(t, x, \frac{\partial W}{\partial x}(t,x)).$$

Alors $W = V$ et un feedback optimal est donné par $\tilde{u}^*$.