Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Examen du 15/01/2020
“Optimisation et programmation dynamique”
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère le problème suivant (dans $\mathbb{R}^N$) :

$$\min\left\{\sum_{i=1}^N (1-x_i)^2 \text{ sous contraintes } \sum_{i=1}^N x_i = 1,\ x_i \geq 0\ \forall i = 1,\dots,N\right\}$$

1. Montrer que le problème possède une et une seule solution.
2. Expliquer pourquoi la contrainte est qualifiée en tout point.
3. Soit $(x_1,\dots,x_N)$ un minimum du problème. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité.
4. En utilisant le fait qu'il existe une seule solution au problème, calculer cette solution.
5. Pour $y \geq 0$ et $N \geq 1$, on considère maintenant le problème

$$V_N(y) = \min\left\{\sum_{i=1}^N (1-x_i)^2, \text{ sous contraintes } \sum_{i=1}^N x_i = y,\ x_i \geq 0\ \forall i = 1\dots,N\right\}.$$

En s'inspirant du principe de programmation dynamique, écrire une relation de récurrence entre V_{N+1} et V_N (on ne demande pas de justification).

6. En déduire $V_N(y)$ pour tout $y \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

Solution :

1. *La contrainte $K := \{(x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N,\ \sum_{i=1}^N x_i = 1,\ x_i \geq 0\ \forall i = 1,\dots,N\}$ est compacte (elle est clairement fermée et elle bornée puisque, si $(x_1,\dots,x_N) \in K$, alors $x_i \in [0,1]$). Elle est aussi convexe (égalité et inégalités de fonctions affines). Comme le critère $f(x) = \sum_i (1-x_i)^2$ est continu et strictement convexe puisque $D^2 f(x) = 2I_N > 0$. Donc il existe un unique point de minimum par un théorème du cours.*
2. *Comme la contrainte est affine, elle est qualifiée en tout point d'après un théorème du cours.*
3. *Soit $x = (x_1,\dots,x_N)$ un minimum du problème. Comme la contrainte est qualifiée en $(x_1,\dots,x_N)$, le théorème de Kuhn et Tucker affirme qu'il existe $\lambda_i \geq 0$ (pour $i = 1,\dots,N$) (correspondant aux contraintes d'inégalités $-x_i \leq 0$) et $\mu \in \mathbb{R}$ (correspondant à la contrainte d'égalité $\sum_{i=1}^N x_i - 1 = 0$) tels que*

$$-2(1-x_i) - \lambda_i + \mu = 0, \qquad \mu_i x_i = 0, \qquad \forall i = 1,\dots,N.$$

4. *Par symétrie du problème, on a, pour toute permutation σ sur $\{1,\dots,N\}$, que $(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(N)})$ est aussi un minimum puisqu'il vérifie les contraintes*

$$x_{\sigma(i)} \geq 0\ \ \forall i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^N x_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^N x_i = 1$$

et a même valeur pour le critère :

$$f((x_{\sigma(i)})) = \sum_{i=1}^{N}(1 - x_{\sigma(i)})^2 = \sum_{i=1}^{N}(1 - x_i)^2 = f(x).$$

Par unicité du minimum on a donc $x_{\sigma(i)} = x_i$ pour tout i, ce qui prouve que x_i ne dépend pas de i. Comme $\sum_i x_i = 1$, on peut conclure que $x_i = 1/N$ pour tout i et donc le minimum du problème est $N(1 - 1/N)^2$.

5. *Par principe de programmation dynamique, on a*

$$V_{N+1}(y) = \inf\{(1 - x_{N+1})^2 + V_N(y - x_{N+1}),\ 0 \leq x_{N+1} \leq y\}.$$

6. *On remarque que*

$$V_1(y) = \inf\{(1 - x)^2,\ x = y\} = (1 - y)^2.$$

Montrons par récurrence que $V_N(y) = N(1-y/N)^2$. En effet, cela est vrai au rang $N = 1$. Supposons que cela soit vrai au rang N (et que $y > 0$ car sinon le résultat est évident). Alors, d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence,

$$V_{N+1}(y) = \inf\{(1 - x_{N+1})^2 + N(1 - (y - x_{N+1})/N)^2,\ 0 \leq x_{N+1} \leq y\}.$$

C'est un problème de minimisation convexe, qui n'admet qu'une seule solution que l'on cherche par les conditions nécessaires d'optimalité : on cherche d'abord un minimum dans l'intervalle ouvert $]0, y[$ où les conditions s'écrivent

$$-2(1 - x_{N+1}) + 2(1 - (y - x_{N+1})/N) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{N+1} = \frac{y}{N+1} \in]0, y[.$$

Comme le problème est convexe, ces conditions nécessaires sont suffisantes et on a

$$V_{N+1}(y) = (1 - y/(N + 1))^2 + N(1 - y(1 - 1/(N + 1))/N)^2 = (N + 1)(1 - y/(N + 1))^2.$$

Nous avons donc montré que $V_N(y) = N(1 - y/N)^2$ pour tout $y > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Notons que, pour $y = 1$, on retrouve le résultat de la question 4.

Exercice 2. Pour $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ donnés, on s'intéresse au problème de contrôle optimal :

$$\inf\left\{\int_0^T e^{-s}u^2(s)ds + x(T), \qquad \text{où } x(0) = x,\ x'(t) = x(t) + u(t),\ u(t) \in \mathbb{R}\right\}.$$

1. Calculer le Hamiltonien $H(t, x, p)$ du problème.
2. Utiliser le principe du maximum de Pontryagin pour trouver les solutions optimales.

Solution :

1. *On a (avec les notations du cours) $U = \mathbb{R}$, $L(t, x, u) = e^{-t}u^2$, $f(t, x, u) = x + u$ et $g(x) = x$. Donc, pour tout $(t, x, p) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,*

$$H(t, x, p) = \sup_{u \in \mathbb{R}}\{-pf(t, x, u) - L(t, x, u)\} = \sup_{u \in \mathbb{R}}\{-p(x + u) - e^{-t}u^2\} = -px + \frac{e^t}{4}p^2,$$

(où le maximum est atteint en $u^* = e^t p/2$).

2. *On sait d'abord le principe du maximum de Pontryagin que, si u et x sont optimaux pour le problème, alors il existe p tels que*

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -\frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t)) = x(t) - \frac{e^t}{2}p(t) \\ p'(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t)) = -p(t) \\ x(0) = x,\ p(T) = g'(x(T)) = 1 \\ u(t) = e^t p(t)/2 \end{array}\right.$$

On déduit de l'équation sur p que $p(t) = e^{T-t}$, et donc x vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) - \frac{e^T}{2} \\ x(0) = x \end{array}\right.$$

et donc

$$x(t) = (x - \frac{e^T}{2})e^t + \frac{e^T}{2}, \qquad u(t) = \frac{e^T}{2} \qquad t \in [0, T].$$

Exercice 3. On se donne $A, B \in \mathbb{R}$ et $L : [0, +\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (on écrira $L = L(t, x, p)$). On considère le problème de calcul des variations

$$\min\left\{\int_0^t L(s, x(s), x'(s))ds,\ \text{où } t > 0,\ x \in \mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R}),\ x(0) = A,\ x(t) = B\right\},$$

(attention ! bien noter que l'on minimise sur x et sur t). On rappelle que, si $t > 0$ est fixé, l'application $f_t : \mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_t(x) = \int_0^t L(s, x(s), x'(s))ds \qquad \forall x \in \mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R})$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R})$ avec

$$df_t(x)(w) = \int_0^t \left(\frac{\partial L}{\partial x}(s, x(s), x'(s))w(s) + \frac{\partial L}{\partial p}(s, x(s), x'(s))w'(s)\right) ds, \qquad \forall x, w \in \mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R}).$$

On suppose que le couple $(T, x) \in]0, +\infty[\times\mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$ est un point de minimum du problème.

1. Expliquer pourquoi x vérifie la condition d'Euler

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial p}(s, x(s), x'(s)) = \frac{\partial L}{\partial x}(s, x(s), x'(s)) \qquad \forall s \in [0, T].$$

2. On définit $\tilde{x}(s)$ sur $[0, T+1]$ par $\tilde{x}(s) = x(s)$ si $s \in [0, T]$ et $\tilde{x}(s) = x(T) + (s - T)x'(T)$ sur $[T, T+1]$. Pour $w \in \mathcal{C}^1([0, T+1], \mathbb{R})$ avec $w(0) = 0$, on définit l'application $\Phi :]0, T+1[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ par

$$\Phi(t, \lambda) = \left(\int_0^t L(s, \tilde{x}(s) + \lambda w(s), \tilde{x}'(s) + \lambda w'(s))ds, \tilde{x}(t) + \lambda w(t)\right).$$

On admettra que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Exprimer $\Phi(T, 0)$ et la différentielle $d\Phi(T, 0)$ de Φ en $(T, 0)$ en fonction de T, B, L, x et w et de leurs dérivées.

3. Montrer que $d\Phi(T, 0)$ ne peut pas être inversible (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème d'inversion locale pour contredire l'optimalité de (T, x))

4. En utilisant l'équation d'Euler vérifiée par x, déduire de la question précédente que

$$L(T,x(T),x'(T)) = \frac{\partial L}{\partial p}(T,x(T),x'(T))x'(T).$$

5. (Application) On considère le problème

$$\min\left\{\int_0^t (\frac{1}{2}(x'(s))^2+1)ds,\ \text{où } t>0,\ x\in\mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R}),\ x(0)=0,\ x(t)=1\right\},$$

et admet un point de minimum $(T,x)\in]0,+\infty[\times\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$. En utilisant les questions 1 et 4, déterminer le couple (T,x).

Solution :

1. *Si on fixe T, x miniminise $f_T(y)$ sous contraintes $y\in X$, $y(0)=A$, $y(T)=B$. On peut donc appliquer directement les conditions nécessaires d'optimalité d'Euler à x :*

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial p}(s,x(s),x'(s)) = \frac{\partial L}{\partial x}(s,x(s),x'(s)) \qquad \forall s\in[0,T].$$

2. *Notons que $\tilde{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T+1]$ avec $\tilde{x}(0)=A$. De plus,*

$$\Phi(T,0) = (\int_0^T L(s,\tilde{x}(s),\tilde{x}'(s))ds\ ,\ \tilde{x}(T)) = (\int_0^T L(s,x(s),x'(s))ds\ ,\ B),$$

tandis que

$$\frac{\partial\Phi(T,0)}{\partial t} = (L(T,\tilde{x}(T),\tilde{x}'(T))\ ,\ \tilde{x}'(T)) = (L(T,x(T),x'(T))\ ,\ x'(T)),$$

et, comme $\lambda\to\Phi(T,\lambda)=(f_T(\tilde{x}+\lambda w),\tilde{x}(T)+\lambda w(T))$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi(T,0)}{\partial\lambda} &= (df_T(\tilde{x})(w),w(T))\\ &= (\int_0^T\left(\frac{\partial L}{\partial x}(s,x(s),x'(s))w(s)+\frac{\partial L}{\partial p}(s,x(s),x'(s))w'(s)\right)ds\ ,\ w(T))\end{aligned}$$

La matrice jacobienne de Φ en $(T,0)$ est donc

$$J_\Phi(T,0) = \begin{pmatrix} L(T,x(T),x'(T)) & x'(T)\\ \int_0^T\left(\frac{\partial L}{\partial x}(s,x(s),x'(s))w(s)+\frac{\partial L}{\partial p}(s,x(s),x'(s))w'(s)\right)ds & w(T)\end{pmatrix}$$

3. *Supposons que $d\Phi(T,0)$ soit inversible. Posons $\theta=f_T(x)$. Alors d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de $(T,0)$ et un voisinage ouvert V de (θ,B) tels que Φ est une bijection de U dans V d'inverse de classe $\mathcal{C}^1$ sur V. En particulier, comme, pour tout $h>0$ petit, le point $(\theta-h,B)$ appartient à V, il existe $(t,\lambda)\in U$ avec $\Phi(t,\lambda)=(\theta-h,B)$. Alors la fonction $y(s)=\tilde{x}(s)+\lambda w(s)$ vérifie : $y\in\mathcal{C}^1([0,t],\mathbb{R})$, $y(0)=\tilde{x}(0)+\lambda w(0)=A$, $y(t)=\tilde{x}(t)+\lambda w(t)=B$ et*

$$\int_0^t L(s,y(s),y'(s))ds = \theta-h<\theta=\int_0^T L(s,x(s),x'(s))ds.$$

Cela contredit la minimalité du couple (T,x). Donc $d\Phi(T,0)$ n'est pas inversible.

4. *On déduit de la question précédente que le déterminant de la matrice associée à $d\Phi(T,0)$ est nul, i.e.,*

$$L(T, x(T), x'(T))w(T) - x'(T)\int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x}(s, x(s), x'(s))w(s) + \frac{\partial L}{\partial p}(s, x(s), x'(s))w'(s)\right) ds = 0.$$

Notons que, par intégration par parties puis en utilisant la condition d'Euler et le fait que $w(0) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{\partial L}{\partial p}(s, x(s), x'(s))w'(s) \\
&\qquad = \left[\frac{\partial L}{\partial p}(s, x(s), x'(s))w(s)\right]_0^T - \int_0^T \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial L}{\partial p}(s, x(s), x'(s))\right] w(s)ds \\
&\qquad = \frac{\partial L}{\partial p}(T, x(T), x'(T))w(T) - 0 - \int_0^T \frac{\partial L}{\partial x}(s, x(s), x'(s))w(s)ds
\end{aligned}$$

Donc

$$L(T, x(T), x'(T))w(T) - x'(T)\frac{\partial L}{\partial p}(T, x(T), x'(T))w(T) = 0.$$

Cette relation est vraie pour tout fonction w de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T+1]$ qui s'annule en 0. Donc, en particulier, pour toute fonction de la forme $w_\alpha(t) = \alpha t$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$(L(T, x(T), x'(T)) - x'(T)\frac{\partial L}{\partial p}(T, x(T), x'(T)))\alpha T = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Comme $T > 0$, on peut conclure que

$$L(T, x(T), x'(T)) - x'(T)\frac{\partial L}{\partial p}(T, x(T), x'(T)) = 0,$$

ce qui est le résultat demandé.

5. *On applique le résultat précédent au problème*

$$\min \left\{ \int_0^t (\frac{1}{2}(x'(s))^2 + 1)ds, \text{ où } t > 0,\ x \in \mathcal{C}^1([0,t], \mathbb{R}),\ x(0) = 0,\ x(t) = 1 \right\}.$$

Posons $L(t, x, p) = \frac{1}{2}p^2 + 1$, $A = 0$, $B = 1$. Alors, si (T, x) est un minimum du problème, on a d'après la question 1 que x vérifie l'équation d'Euler :

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial p}(s, x(s), x'(s)) = \frac{d}{ds}x'(s) = x''(s) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) = 0 \qquad \forall t \in [0, T].$$

Donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x(s) = a + bs$. Comme $x(0) = 0$, on a $a = 0$. Comme $x(T) = 1$, on a $bT = 1$. Enfin, la question 4 affirme que

$$L(T, x(T), x'(T)) = (\frac{1}{2}(x'(s))^2 + 1) = (\frac{1}{2}b^2 + 1) = x'(T)\frac{\partial L}{\partial p}(T, x(T), x'(T)) = b^2.$$

Donc $b = \pm\sqrt{2}$. Or $bT = 1$, ce qui implique que $b = \sqrt{2}$ et $T = 1/\sqrt{2}$.
En conclusion, on a

$$T = 1/\sqrt{2} \text{ et } x(s) = s\sqrt{2} \qquad \forall s \in [0, T].$$