Exercices sur le cours
“Optimisation et programmation dynamique”

2018-2019
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année
Université Paris Dauphine

1 Optimisation

1.1 Le théorème de Kuhn et Tucker

Exercice 1. On considère le problème

$$\max_{g(x)\leq 0} f(x)$$

Montrer que, si x est un maximum du problème et la contrainte est qualifiée en x, alors il existe $\lambda \leq 0$ tel que

$$\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0 \ .$$

Exercice 2. On considère le problème de la boite

$$\min_{\substack{x_i \geq 0 \\ x_1x_2x_3=2}} \quad (x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3)$$

1. Proposer une interprétation du problème.
2. On suppose que le problème admet une solution. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité et calculer cette solution.
3. (difficile) Montrer que le problème admet bien une solution

Exercice 3. On considère problème

$$\max_{x^3+y^3-3xy+1=0} (x+y)$$

Calculer la solution de ce problème (on admet l'existence d'un maximum).

Exercice 4. On considère le problème

$$\max_{\substack{0\leq x_i \leq 42 \\ x_1+2x_2+2x_3\leq 72}} \quad (x_1+x_2)$$

Calculer la solution de ce problème.

Exercice 5. On considère le problème

$$\max_{\substack{0\leq x \\ 0\leq y\leq (1-x)^3}} \quad (3x+y)$$

1. Montrer que le point $(0, 1)$ est le seul point vérifiant les conditions nécessaires.
2. Montrer que le point $(1, 0)$ est le minimum du problème.

Exercice 6. Soit A une matrice symétrique de format $n \times n$.

1. Montrer que
$$m = \min_{\|x\|=1} x^T Ax$$
est la plus petite valeur propre de A.
2. Soient $\{v_i\}_{i=1,\dots,k}$ une famille de vecteurs propres de A, deux à deux orthogonaux. Montrer que la quantité
$$\begin{array}{cc} \min & x^T Ax \\ \|x\| = 1, & \\ v_i^T x = 0,\ \forall i = 1, \dots, k & \end{array}$$
est une valeur propre de A.

Exercice 7. Soit P l'hyperplan de $\mathbb{R}^N$ d'équation $c^T x = d$ (où $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$). Calculer la projection orthogonale d'un point y de $\mathbb{R}^n$ sur P, c'est-à-dire le minimum du problème
$$\min_{c^T x = d} \frac{1}{2} \|x - y\|^2$$

Exercice 8. Quelles conditions doivent vérifier les réels p, q, r pour que la fonction linéaire $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to x_1 + px_2 + qx_3 + rx_4$ atteigne son maximum sous les contraintes $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ au point $(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$?

Exercice 9. Les problèmes suivants ont-ils a priori une unique solution ? La (les) calculer.
$$\begin{array}{cc} \min & x^2 + y^2 + 2z^2 \\ x + y \ge 1 & \\ x + 2y + z \ge 0 & \\ y \le z & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \min & x^2 + y \\ y \le 0 & \\ y \ge x & \\ x + y + 3 \ge 0 & \end{array}$$

Exercice 10. Calculer, en fonction du paramètre $u \in \mathbb{R}$, la solution du problème
$$\begin{array}{cc} \min & (xy + uxz + u^2 yz) \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \le x \le y \le z \\ x + y + z \le 1 \end{array} \right. & \end{array}$$

Exercice 11. Déterminer les points vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité et trouver la solution du problème si celle-ci existe :
$$\begin{array}{cc} \max & x^2 + y \\ \left\{ \begin{array}{l} y \le 0,\ y \le x \\ x + y + 3 \ge 0 \end{array} \right. & \end{array}$$

Exercice 12. Soient M la matrice
$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et S l'ensemble convexe
$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1,\ x_i \ge 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3\}$$

Montrer que le problème

$$\max_{X \in S} X^T M X$$

admet une unique solution. La calculer.

Ind. L'inverse de M est $M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. On cherche à résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{(x,y)\in K} (x-2)^2 + y^2 \qquad \text{où} \qquad K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\right\}.$$

1. Montrer que le problème admet au moins une solution.
2. Montrer que la contrainte est qualifiée en tout point.
3. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème.
4. Trouver tous les points satisfaisant les conditions nécessaires d'optimalité.
5. En déduire la (ou les) solution(s) du problème $(\mathcal{P})$.

1.2 Dualité

Exercice 14. Résoudre par dualité le problème

$$\min_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ y+z \leq 0}} \frac{1}{2}\left[(x-2)^2 + y^2 + z^2\right]$$

Exercice 15. Calculer le problème dual de

$$\min_{\substack{-\log(x) - y \leq 0 \\ y \geq 1}} x + \frac{1}{2}y^2$$

Exercice 16. Résoudre par dualité le problème

$$\min_{\frac{1}{2}x^T A x \leq 1} c^T x$$

où A est une matrice symétrique définie positive de format $n \times n$, et c un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 17. On s'intéresse au problème

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{Cx \leq d} \frac{1}{2}x^T A x + b^T x$$

où A est une matrice $n \times n$ définie positive, b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, C est une matrice de format $l \times n$ et d est un vecteur de $\mathbb{R}^l$. L'expression $Cx \leq d$ signifie que toute composante de Cx est inférieure ou égale à la composante correspondante de d. Montrer que le problème dual du problème $(\mathcal{P})$ est le problème suivant

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^l_+} -\frac{1}{2}\lambda^T C A^{-1} C^T \lambda - (b^T A^{-1} C^T + d^T)\lambda$$

Exercice 18. On considère a_i ($i = 1, \ldots, n$) des réels strictement positifs, et x tel que $\sum_{i=1}^n x_i^2/a_i^2 > 1$, c'est-à-dire que x n'appartient pas à l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2/a_i^2 \leq 1\}$$

Calculer le problème dual $d(\lambda)$ du problème

$$\min_{u \in \mathcal{E}} \|u - x\|^2$$

Montrer que le maximum de $d(\lambda)$ vérifie

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2 + \lambda)^2} = 1 \ .$$

Exercice 19. Résoudre par dualité le problème

$$\min_{\langle s,x \rangle \leq 0} \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle c, x \rangle$$

où s et c sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ non nuls.

Exercice 20. On considère le problème

$$\min_{Ax=b} \frac{1}{2}\|x\|^2$$

où A est une matrice $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

1. Quelle est la signification géométrique de ce problème.
2. Calculer le problème dual $(\mathcal{D})$.
3. A quelle condition le problème dual admet-il une unique solution ?
4. Calculer dans ce cas cette solution en fonction de A et b.

1.3 Méthodes numériques

1.3.1 Méthodes de pénalisation

Exercice 21 (Méthode de pénalisation intérieure)**.** Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$, strictement convexes avec g coercive. On suppose qu'il existe un point x_0 tel que $g(x_0) < 0$.

1. Montrer que le problème sous contrainte

   $$\min_{x \in K} f(x) \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ g(x) \leq 0\}$$

   possède une unique solution $\bar{x}$.
   L'objectif du problème est d'approcher $\bar{x}$ par une méthode de pénalisation. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

   $$J_\epsilon(x) := f(x) - \frac{\epsilon}{g(x)} \qquad \forall x \in Int(K) = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ g(x) < 0\}.$$

2. Montrer que J_ϵ possède un unique minimum x_ϵ dans $Int(K)$.
3. Soit $x \in Int(K)$. Vérifiez que $J_\epsilon(x) \geq J_\epsilon(x_\epsilon) \geq f(x_\epsilon)$. En déduire que, si $\tilde{x}$ est une valeur d'adhérence de (x_ϵ) lorsque $\epsilon \to 0$, alors $f(x) \geq f(\tilde{x})$.
4. Conclure que (x_ϵ) tend vers $\bar{x}$ lorsque $\epsilon \to 0$.
5. On suppose que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$. Ecrire la condition d'optimalité pour x_ϵ et redémontrer l'existence d'un multiplicateur $\lambda \geq 0$ pour $\bar{x}$.
6. Suggérer une méthode numérique d'approximation de $\bar{x}$.

Exercice 22 (Méthode de pénalisation extérieure)**.** Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$, strictement convexes avec f coercive. On note $\bar{x}$ l'unique solution du problème sous contrainte

$$\min_{x \in K} f(x) \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ g(x) \leq 0\}$$

L'objectif du problème est d'approcher $\bar{x}$ par une méthode de pénalisation extérieure. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$J_\epsilon(x) := f(x) + \frac{1}{\epsilon} \left(\max\{0, g(x)\}\right)^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Montrer que J_ϵ possède un unique minimum x_ϵ dans $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que la famille (x_ϵ) est bornée pour $\epsilon \in (0, 1)$.
3. Soit $x \in K$. Vérifiez que $J_\epsilon(x) \geq J_\epsilon(x_\epsilon) \geq f(x_\epsilon)$. En déduire que, si $\tilde{x}$ est une valeur d'adhérence de (x_ϵ) lorsque $\epsilon \to 0$, alors $f(x) \geq f(\tilde{x})$.
4. Conclure que (x_ϵ) tend vers $\bar{x}$ lorsque $\epsilon \to 0$.
5. On suppose que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$. Vérifier que J_ϵ est de classe C^1 et suggérer une méthode numérique d'approximation de $\bar{x}$.
6. On suppose que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et que la contrainte K est qualifiée. On dit que la pénalisation est exacte si il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $x_\epsilon = \bar{x}$ pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$. Vérifier que la pénalisation est exacte, si et seulement si, le multiplicateur dans la condition nécessaire d'optimalité pour $\bar{x}$ est nul.
7. Comparer les résultats avec la méthode de pénalisation intérieure de l'exercice précédent.

Exercice 23 (Méthode de pénalisation exacte)**.** Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, strictement convexes avec f coercive. On note $\bar{x}$ l'unique solution du problème sous contrainte

$$\min_{x \in K} f(x) \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ g(x) \leq 0\}$$

On suppose que la contrainte K est qualifiée et on note λ le multiplicateur dans la condition nécessaire d'optimalité pour $\bar{x}$.

Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$J_\epsilon(x) := f(x) + \frac{1}{\epsilon} \left(\max\{0, g(x)\}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Montrer que J_ϵ possède un unique minimum x_ϵ dans $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que si $\epsilon \in]0, 1/\lambda[$, alors $x_\epsilon = \bar{x}$.
3. En pratique, la valeur de λ est inconnue et on doit chercher à l'estimer. Montrer que $x_\epsilon = \bar{x}$ si $\epsilon \in]0, M^{-1}[$ avec $M := \max_{x \in K} \|\nabla f(x)\| / \min_{x \in \partial K} \|\nabla g(x)\|$.

1.3.2 Programmation linéaire et algorithme du simplexe

Exercice 24. L'objectif de l'exercice est de montrer qu'on peut mettre tout problème d'optimisation avec critère et contraintes affines sous la forme standard de la programmation linéaire. Soit C une matrice de format $m \times n$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^m$.

1. On considère le problème

$$(P1) \qquad \inf_{x \in K} \langle a, x \rangle \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^n_+,\ Cx \leq d\}.$$

   On définit alors $\tilde{a} = (a, 0) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\tilde{C} := (C\ I_m)$ de format $m \times (n+m)$. Montrer que le problème $(P1)$ est "équivalent" au problème

$$(P2) \qquad \inf_{(x,y) \in K} \langle \tilde{a}, (x,y) \rangle \qquad \text{où } K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}_+,\ \tilde{C}(x,y) = d\}$$

   au sens où la valeur de l'infimum est la même et où l'on peut construire les solutions de l'un à partir des solutions de l'autre.

2. On considère le problème

$$(P3) \qquad \inf_{x \in K} \langle a, x \rangle \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^n,\ Cx = d\}.$$

   On pose $\tilde{a} = (a, -a)$ et $\tilde{C} = (C, -C)$. Montrer que le problème $(P3)$ est "équivalent" au problème

$$(P4) \qquad \inf_{(x,y) \in K} \langle \tilde{a}, (x,y) \rangle \qquad \text{où } K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}_+,\ \tilde{C}(x,y) = d\}$$

Exercice 25. Soit

$$K := \{x = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5_+\ :\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1\}.$$

Déterminer les sommets de K.

Exercice 26. On rappelle qu'un point extrémal d'un ensemble convexe fermé $K \subset \mathbb{R}^n$ est un point x de K tel que, s'il existe $x^1, x^2 \in K$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda x^2)$, alors $x^1 = x^2 = x$.

Montrer qu'un ensemble convexe compact K possède toujours un point extrémal. Est-ce encore le cas si K n'est pas compact ?
(Indication : on pourra considérer le point x de K de norme euclidienne maximale.)

Exercice 27. On rappelle que, si Γ est une matrice de format $M \times N$, l'ensemble $\{\Gamma x,\ x \in \mathbb{R}^N_+\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^M$. On considère le problème de programmation linéaire

$$(P) \qquad \inf_{x \in K} \langle a, x \rangle \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^n_+,\ Cx = d\}.$$

Montrer que soit l'infimum est $-\infty$, soit le problème admet un minimum.
(Indication : on pourra considérer l'ensemble $\{(Cx, \langle a, x \rangle),\ x \in \mathbb{R}^n_+\}$.)

2 Programmation dynamique

2.1 Contrôle optimal en temps discret

Exercice 28. Pour $x \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème

$$W(x) := \inf\{\sum_{i=0}^{N-1} u_i^2,\ \text{où } u_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{N-1} u_i = x\}$$

On se propose de comparer $W(x)$ par deux méthodes :

1. Calculer $W(x)$ en utilisant les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker.
2. Ecrire le problème comme un problème de contrôle à horizon N et utiliser le principe de programmation dynamique. Pour cela,
   (a) Réécrire le problème en posant $U_n(x) = [0, x]$ pour $n \leq N-2$, $U_{N-1}(x) = x$, $f_n(x, u) = x - u$, $g = 0$, $\ell_n(x, u) = u^2$.
   (b) Ecrire la programmation dynamique pour les fonctions valeurs V_n.
   (c) En déduire que $V_n(x) = x^2/(N - n)$.
   (d) Calculer $W(x)$.
3. Comparer les deux méthodes.

Exercice 29. On s'intéresse au problème de croissance optimale décrit par

$$\sup_{(k_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(k_t^\alpha - k_{t+1}\right)$$

sous les contraintes : $k_0 = k$ (où $k > 0$ est donné), $k_{t+1} \in [0, k_t^\alpha]$ pour tout $t \in \mathbb{N}$. Le taux d'actualisation $\beta \in]0, 1[$ et la puissance $\alpha \in]0, 1[$ sont donnés.

Pour $k > 0$, on note $W(k)$ la valeur de ce problème. L'interprétation économique est que (k_t) représente le capital à l'instant t, la différence $k_t^\alpha - k_{t+1}$ étant la consommation (en gros la différence entre la production k_t^α et l'investissement k_{t+1} à l'instant t).

1. Pour $k > 0$, soit $v(k)$ la fonction valeur du problème

$$v(k) := \sup_{(k_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(k_t^\alpha\right)$$

   sous les mêmes contraintes que pour W. Montrer que $v(k) = \dfrac{\alpha \ln(k)}{1 - \alpha\beta}$ et que que $W \leq v$.
2. Montrer que W est solution de l'équation de de point fixe : $f = Tf$ avec T l'opérateur défini par

$$Tf(x) := \sup_{y \in [0, x^\alpha]} \left\{\ln(x^\alpha - y) + \beta f(y)\right\}.$$

   pour tout $x > 0$.
3. Pourquoi ne peut on pas affirmer ici directement que W est l'unique solution de l'équation de Bellman ?
4. Montrer que $Tv = v + c$ avec c une constante négative à déterminer.
5. Calculer les itérées $T^n v$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que cette suite converge vers une limite v_∞ que l'on explicitera. Montrer enfin que $Tv_\infty = v_\infty$.

6. Montrer que $W \leq v_\infty$.
7. Montrer que $W \geq v_\infty$ (plus difficile) et conclure.
8. Montrer que le problème initial admet une solution unique que l'on calculera. On notera (k_t^*) cette politique optimale.
9. Etudier la dynamique optimale (k_t^*) (monotonie, convergence).

Exercice 30. Pour $x \geq 0$ et $N \geq 1$ un entier, on définit

$$V_N(x) := \sup\left\{\prod_{i=0}^{N} x_i : x_i \geq 0, \sum_{i=0}^{N} x_i = x\right\}$$

1. Calculer V_1

2. Trouver une relation de récurrence entre V_N et V_{N-1}

3. Montrer que

$$V_N(x) = \frac{x^N}{N^N}$$

4. En déduire l'inégalité entre la moyenne géométrique et arithmétique

$$(|x_1| \cdots |x_N|)^{\frac{1}{N}} \leq \frac{|x_1| + \cdots + |x_N|}{N}$$

Et étudier le cas d'égalité.

Exercice 31. Résoudre le problème

$$\min_{x_t} \sum_{t=0}^{2} (x_t^2 + t u_t^2) + x_3^2$$

avec x_t vérifiant la dynamique $x_{t+1} = x_t - u_t$ et $x_0 = 1$

Exercice 32. Trouver les extrema de

$$\sum_{t=0}^{3} (te^{u_t} + x_t) - 2x_4$$

avec x_t vérifiant la dynamique $x_{t+1} = x_t + u_t$ et $x_0 = x$ et sous la contrainte $0 \leq u \leq 1$

Exercice 33. Résoudre le problème

$$\min_u \sum_{t=1}^{4} -2u_t - 3(x_t - u_t)$$

avec x_t vérifiant la dynamique $x_{t+1} = 0.8u_t + 0.5(x_t - u_t)$ sous la contrainte $0 \leq u$ et $0 \leq (x - u)$

Exercice 34. Résoudre le problème

$$\min_u \sum_{t=0}^{3} \frac{1}{2}(x_t^2 + u_t^2) + \frac{1}{2} x_T^2$$

avec x_t vérifiant la dynamique $x_{t+1} = x_t - u_t$ avec $x_0 = 1$

Exercice 35. Résoudre le problème

$$\max(x_1 + 4x_2 + 2x_3)$$

avec $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et $x_i \geq 0$

2.2 Calcul des variations

Exercice 36. Ecrire les équations d'Euler associées au problème suivant et en calculer les solutions :

$$J_1(x) = \int_0^1 2tx(t) - x^2(t) + 3x^2(t)x'(t)\ dt$$

et

$$J_2(x) = \int_0^1 t\sqrt{1 + (x'(t))^2}\ dt$$

Exercice 37. Même question pour les problèmes suivants, en tenant compte cette fois des conditions aux extrémités :

$$J_1(x) = \int_0^1 (x'(t))^2 + 12tx(t)\ dt \qquad \text{avec } x(0) = 2,\ x(1) = 3\ ,$$

$$J_2(x) = \int_0^1 x'(t)(1 + (1+t)^2 x'(t))dt \qquad \text{avec } x(0) = 3,\ x(1) = 2\ .$$

Exercice 38. On considère le problème

$$\inf_{x \in C^1([0,1]),\ x(0)=1,\ x(1)=0} \int_0^1 t\sqrt{1 + (x'(t))^2} dt\ .$$

(i) Vérifier que, pour tout $x \in C^1([0,1])$, $\int_0^1 t\sqrt{1 + (x'(t))^2} dt \geq 1/2$.
(ii) Montrer que l'infimum est égal à $1/2$ (on pourra calculer le critère pour les fonctions de la forme $x_n(t) = (1-t)^n$).
(iii) Montrer que le problème n'a pas de solution.

Exercice 39. On considère le problème de calcul des variations (sans condition terminale) :

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in X,\ x(0)=A} \int_0^1 L(t, x(t), x'(t))dt + g(x(1))\ ,$$

où X est l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Les fonctions $L = L(t,x,p)$ et $g = g(x)$ sont supposés de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ respectivement. On suppose que x est un minimum du problème.

(i) Montrer que, pour toute fonction $v : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 on a

$$\int_0^1 \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t))v(t) + \frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t))v'(t)\ dt + g'(x(1))v(1) = 0.$$

(ii) Utiliser le lemme de Dubois-Raymond pour démontrer que x vérifie l'équation d'Euler : la fonction $t \to \frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) \qquad \forall t \in [0,1]\ . \tag{1}$$

(iii) En déduire que, pour toute fonction $v : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 on a $g'(x(1))v(1) = 0$.
(iv) Montrer alors que x vérifie la “condition de transversalité” : $g'(x(1)) = 0$.
(v) On admet que le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in X,\ x(0)=1} \int_0^1 (x'(t))^2 dt + (x(1))^2$$

admet un minimum. Le déterminer.

2.3 Contrôle optimal en temps continu

Exercice 40. On considère le problème de contrôle dans $\mathbb{R}$:

$$V(t_0, x_0) := \inf_{u(\cdot)} g(x(T))$$

sous la contrainte que $u : [t_0, T] \to [-1, 1]$ est mesurable et que $x(\cdot)$ est l'unique solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est supposée continue.

1. Montrer qu'alors la fonction valeur du problème de contrôle est donnée par

$$V(t,x) = \min_{y \in [x-(T-t), x+(T-t)]} g(y) \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}.$$

2. Montrer que V est continue, mais pas forcément de classe C^1 sur $[0,T] \times \mathbb{R}$.
3. On suppose que g est convexe et de classe C^1. Montrer que V est de classe C^1 sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ et vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\begin{cases} -\partial_t V(t,x) + \left|\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right| = 0 & \text{dans}]0,T[\times\mathbb{R} \\ V(T,x) = g(x) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 41. On considère une entreprise de pêche qui puise dans une population de poissons dont on note $x(t)$ la taille à la date t, si la pêche par unité de temps est notée $v(t)$, l'évolution de $x(t)$ est régie par l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = ax(t) - v(t),\ x(t) = x_0$$

où le taux de croissance de la population de poissons $a > 0$ ainsi que le stock initial de poissons $x_0 > 0$ sont donnés. Le but de l'entreprise de pêche est de maximiser son profit actualisé sur une période $[0,T]$:

$$\int_0^T e^{-\lambda t}(v(t) - C(v(t)))dt$$

où C est une fonction de coût strictement convexe et régulière telle que $C'(0) = 0$ et $\lim_{v \to +\infty} C'(v) = +\infty$ et $\lambda > 0$ est un facteur d'actualisation.

1. Formuler le problème sous la forme d'un problème de calcul des variations.
2. Montrer que le problème possède au plus une solution.
3. Ecrire les conditions d'optimalité.

4. (il sera commode de poser $y(t) = e^{-\lambda t}(1 - C'(ax(t) - \dot{x}(t))$ et de définir la constante α comme la racine de l'équation $C'(\alpha) = 1$) et calculer la stratégie de pêche optimale.
5. A quelle condition reste-t-il des poissons quel que soit l'horizon T ?

Exercice 42. On s'intéresse ici au modèle de croissance optimale de Ramsey dans le cas d'un seul secteur de production. Par souci de simplicité on se limitera à un horizon fini $T > 0$. On notera $c(t)$ la consommation instantanée d'un ménage représentatif dont la satisfaction est supposée mesurée par la quantité

$$\int_0^T \exp\{-\delta t\} U(c(t)) dt$$

où la consommation doit satisfaire la contrainte $c(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $\delta > 0$ est le taux d'escompte (donné), et la fonction d'utilité $U : [0, +\infty \to \mathbb{R}$ est supposée strictement concave, croissante et dérivable. On notera par ailleurs $y(t)$, $k(t)$ et $i(t)$ la production, le capital et l'investissement dans l'économie au temps t. On suppose les relations suivantes entre les différentes quantités :

$$y(t) = c(t) + i(t),\ i(t) = \dot{k}(t) \text{ et } y(t) = f(k(t))$$

où f une fonction de production supposée strictement concave, croissante et dérivable.

1. Mettre le modèle sous la forme d'un problème de contrôle optimal, dire quelle est la variable de contrôle et celle d'état.
2. Former le Hamiltonien du problème et écrire les conditions nécessaires fournies par le principe de Pontryagin.
3. Définir la fonction valeur du problème et écrire l'équation de Hamilton-Jacobi associée, ainsi qu'une condition aux limites qu'elle vérifie.
4. Donner une condition suffisante d'optimalité.

Exercice 43. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, on s'intéresse au problème de contrôle optimal :

$$\inf \left\{ \int_0^T u^2(s) ds + x(T),\ \text{où } x(0) = x,\ \dot{x}(t) = x(t) + u(t),\ u(t) \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Calculer le Hamiltonien $H(t, x, p)$ du problème.
2. Utiliser le principe du maximum de Pontryagin pour trouver les solutions optimales.
3. Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi associée au problème et en donner une solution.
4. En déduire un feedback optimal pour le problème.
5. Résoudre le problème initial en utilisant le formalisme du calcul des variations.

Exercice 44 (Lien entre l'équation de Hamilton-Jacobi et le principe du maximum)**.** On suppose que la fonction valeur V est de classe C^∞ et que H est également de classe C^∞. On considère la solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x^*(t), p^*(t)), & t \in [0, T] \\ p^*(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x^*(t)), & t \in [0, T] \\ x^*(0) = x_0 \end{cases}$$

Montrer alors que x^* est une trajectoire optimale et que le couple (x^*, p^*) vérifie le principe du maximum de Pontryagin.

Exercice 45 (Problème en horizon infini)**.** Soit $\lambda > 0$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^N$ une condition initiale fixée, on considère le problème de contrôle optimal en horizon infini :

$$V(x_0) := \inf_{(x,u)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} L(x(t), u(t))\, dt$$

sous la contrainte que $u : [0, +\infty[\to U$ est mesurable et que le couple $(x(\cdot), u(\cdot))$ vérifie l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & t \in [0, +\infty[\\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On définit le *Hamiltonien du système* $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par

$$H(x,p) := \sup_{u \in U} \left\{ -\langle p, f(x,u) \rangle - L(x,u) \right\}.$$

L'application $L : \mathbb{R}^N \times U \to \mathbb{R}$ est supposée continue et bornée et f vérifie les conditions habituelles.

1. Montrer que V satisfait le principe de programmation dynamique : pour tout $t \geq 0$,

$$V(x_0) = \inf_{(x,u)} \int_0^t e^{-\lambda s} L(x(s), u(s))\, ds + e^{-\lambda t} V(x(t))$$

2. On suppose que V est de classe C^1. Montrer que V est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\lambda V(x) + H(x, \frac{\partial V}{\partial x}) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

3. Inversement, on suppose qu'il existe une fonction $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, de classe C^1 et *bornée*, vérifiant

$$\lambda W(x) + H(x, \frac{\partial W}{\partial x}) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

   On suppose de plus qu'il existe un feedback $\tilde{u}^* : \mathbb{R}^N \to U$ continu tel que

$$-\langle \frac{\partial W}{\partial x}, f(x, \tilde{u}^*(x)) \rangle - L(x, \tilde{u}^*(x)) = H(x, \frac{\partial W}{\partial x}), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

   Montrer alors que $W = V$ et que $\tilde{u}^*$ est un feedback optimal.

3 Solution de quelques exercices

Certains exercices sont un peu calculatoires et, faute de temps, ne seront pas traités en TD. Les solutions ci-dessous ont pour objectif d'aider le lecteur à s'entraîner à ces calculs.

Solution de l'exercice 5 : Après calcul, les candidats pour être solution du problème sont, d'une part, le point non qualifié $(1,0)$ et, d'autre part, le point vérifiant les conditions nécessaires $(0,1)$. L'objectif étant strictement meilleur en $(1,0)$ qu'en $(0,1)$, le maximum est atteint en $(1,0)$, et vaut 3.

Solution de l'exercice 7 : On trouve $x = y - [d - c^T y]c/\|c\|^2$.

Solution de l'exercice 8 : La contrainte est affine donc qualifiée en tout point. Le point $(0,0,1/3,2/3)$ est un point de maximum si et seulement si $r = q = 0$ et $p \leq -1$.

Solution de l'exercice 9 : 1) La contrainte est fermée et l'objectif est coercif. Il y a donc une solution. De plus, les contraintes sont convexes et l'objectif strictement convexe, donc la solutions est unique et la condition nécessaire d'optimalité est suffisante. Enfin, les contraintes sont affines donc qualifiées en tout point. Le point $(3/4,1/4,1/4)$ vérifie les conditions nécessaires d'optimalité et est donc l'unique solution.
2) La contrainte est compacte et le critère continu, le problème a donc une solution. Après calculs, on montre que celle-ci est unique : $x = y = -1/2$, et une valeur de $1/4 - 1/2 = -1/4$.

Solution de l'exercice 10 : L'objectif est continu et la contrainte compacte. Il y a donc au moins une solution. Les solutions sont les points tels que :

- si $u > 0$ ou $u \leq -1$: $x = y = 0 \leq z \leq 1$. Valeur nulle.
- si $u = 0$: $x = 0 \leq y \leq z \leq 1 - y$. Valeur nulle.
- si $-1 < u < 0$: $x = \frac{a}{2(1+2a)}$, $y = x$ et $z = 1 - 2x$, où $a = -(u + u^2)$. Valeur : $-\frac{a^2}{4(1+2a)}$.

Solution de l'exercice 11 : On trouve comme points vérifiants les CNO : $(0,0)$, $(-1/2,-1/2)$ et $(-3/2,-3/2)$, qui sont bien dans K, avec des valeurs de l'objectif associées de 0, $-1/4$ et $3/4$. Cependant, le problème n'a pas de solution car, si on prend $y = -1$ et $x \geq 2$, le couple (x,y) vérifie la contrainte, avec un critère $x^2 - 1$ arbitrairement grand lorsque $x \to +\infty$.

Solution de l'exercice 12 : la solution est $(1,0,0)$.

Solution de l'exercice 13 : La valeur est 2, obtenue en $(1,1)$ et en $(1,-1)$.

Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Partiel du 14 mars 2016
“Optimisation et programmation dynamique”
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. Soit A une matrice réelle de format $n \times n$ et C une matrice réelle de format $m \times n$. On suppose que A est symétrique et *semi-définie positive*. Soit $d \in \mathbb{R}^m$. On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{x \in K} x^T A x \qquad \text{où } K := \{x \in \mathbb{R}^n,\ Cx = d\}.$$

1. Soit (x_k) une suite de $\mathbb{R}^n$ telle que $\|x_k\| \to +\infty$. On suppose qu'il existe une constante Λ telle que $x_k^T A x_k \leq \Lambda$ et $Cx_k = d$. Montrer que la suite $(v_k := x_k/\|x_k\|)$ possède une sous-suite qui converge vers un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $v \neq 0$, $Av = 0$ et $Cv = 0$.

   On suppose, à partir de maintenant, que $Ker(A) \cap Ker(C) = \{0\}$ et que l'ensemble K est non vide.

2. Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution.

3. Montrer que cette solution est en fait unique.
   (Question plus délicate : on pourra raisonner par l'absurde en montrant que, si x_1 et x_2 sont deux solutions, alors $x_2 - x_1$ est dans $Ker(A) \cap Ker(C)$).

4. Dans cette question, on suppose que $n = 3$, $m = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Vérifier que le problème possède une unique solution et trouver cette solution par dualité (on justifiera soigneusement cette approche).

Exercice 2. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1. On suppose que *la fonction f est minorée* et on pose

$$m := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) \qquad (\text{noter que } m \in [-\infty, +\infty[).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $t > m$, on pose :

$$K(t) := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) \leq t\} \qquad \text{et} \qquad v(t) := \inf_{x \in K(t)} f(x).$$

On note $(\mathcal{P}(t))$ le problème $\inf_{x \in K(t)} f(x)$.

1. *Dans cette question seulement,* on suppose que $n = 2$, $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^2 + 2y^2$. Calculer m et $v(t)$ pour tout $t > m$.

2. Montrer que la fonction v est décroissante sur $]m, \infty[$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que f et g sont convexes sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction v est convexe sur $]m, \infty[$.

   A partir de maintenant on suppose que f est coercive :

   $$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

   On suppose aussi que, pour tout $t > m$, la contrainte $K(t) := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) \leq t\}$ est qualifiée.

4. Soit $t > m$. Montrer que le problème $(\mathcal{P}(t))$ admet au moins un minimum $x_t \in K(t)$ et écrire les conditions nécessaires d'optimalité pour un tel minimum (on appellera λ_t un multiplicateur associé).

5. On suppose, dans cette question, que v est dérivable en un point $t > m$. Soient x_t et λ_t comme dans la question précédente. On supposera que $\lambda_t > 0$.

   (a) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla g(x_t), v \rangle < 1$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \epsilon[$, $x_t + hv$ appartient à $K(t + h)$. En déduire que $v'(t) \leq \langle \nabla f(x_t), v \rangle$.

   (b) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla g(x_t), v \rangle > 1$. Montrer de façon symétrique que $v'(t) \geq \langle \nabla f(x_t), v \rangle$.

   (c) En déduire que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla g(x_t), v \rangle = 1$, on a $v'(t) = \langle \nabla f(x_t), v \rangle$.

   (d) Conclure que $v'(t) = -\lambda_t$.

Barême indicatif : Exercice 1 = 10 points, Exercice 2 = 15 points.

Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Examen du 23 mai 2016
"Optimisation et programmation dynamique"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. On cherche à résoudre le problème :

$$(\mathcal{P}) \qquad \min \left\{ x(y-1) \text{ où } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le y \right\}.$$

1. Montrer que la valeur du minimum est négative ou nulle.
2. En déduire que le problème admet au moins une solution.
3. Calculer la ou les solutions du problème.

Exercice 2. On considère le problème de contrôle optimal en temps discret

$$\sup \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} L(x_n, x_{n+1}), \quad \begin{array}{l} (x_n)_{n=0,\dots,N} \in [0,1]^{N+1},\ x_0 = x, \\ x_{n+1} \in [0, x_n]\ \forall n = 0, \dots, N-1 \end{array} \right\}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$ sont fixés et où L est définie par

$$L(x,y) = \sqrt{x-y} + \sqrt{y} \qquad \text{si } 0 \le y \le x \le 1.$$

En utilisant le principe de programmation dynamique, montrer que la valeur $V(t,x)$ du problème s'écrit sous la forme $V(t,x) = \alpha_t \sqrt{x}$ où l'on donnera α_N et où l'on écrira une relation de récurrence entre α_t et α_{t+1}.

Exercice 3. On considère un problème général de calcul des variations

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{\substack{u \in \mathcal{C}^1([a,b]), \\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta}} \int_a^b L(t, u(t), u'(t))dt$$

où a, b, α, β sont des réels donnés, avec $a < b$ et où $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On rappelle que toute minimum $\bar{u}$ de ce problème vérifie l'équation d'Euler-Lagrange :

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{d}{dt}\left[L_\xi(t, \bar{u}(t), \bar{u}'(t))\right] = L_\eta(t, \bar{u}(t), \bar{u}'(t)), \qquad \bar{u}(a) = \alpha\ ,\ \bar{u}(b) = \beta\ ,$$

où on note, pour toute fonction $L = L(t, \eta, \xi)$, $L_\xi = \frac{\partial L}{\partial \xi}$, $L_\eta = \frac{\partial L}{\partial \eta}$ et $L_t = \frac{\partial L}{\partial t}$.

L'objet de cet exercice est d'étudier la réciproque à cette question. Rappelons que, si $(\eta, \xi) \to L(t, \eta, \xi)$ est une fonction convexe pour tout $t \in [a,b]$, alors la réciproque est vraie : toute solution $\bar{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ de l'équation $(\mathcal{E})$ est solution de $(\mathcal{P})$.

1. On suppose qu'il existe une fonction $\Phi : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^3$, telle que $\Phi(a,\alpha) = \Phi(b,\beta)$ et telle que la fonction

$$\widetilde{L}(t,\eta,\xi) = L(t,\eta,\xi) + \Phi_\eta(t,\eta)\xi + \Phi_t(t,\eta)$$

vérifie : $(\eta,\xi) \to \widetilde{L}(t,\eta,\xi)$ est une fonction convexe pour tout $t \in [a,b]$.
i) Montrer d'abord que toute solution $\bar{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ de l'équation $(\mathcal{E})$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à $\widetilde{L}$.
ii) Vérifier que, pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^1$ telle que $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$, on a

$$\int_a^b L(t,u(t),u'(t))dt = \int_a^b \widetilde{L}(t,u(t),u'(t))dt.$$

iii) En déduire que toute solution $\bar{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ de l'équation $(\mathcal{E})$ est minimum de $(\mathcal{P})$.

2. On considère *à partir de maintenant* le cas où $L(t,\eta,\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \lambda^2\eta^2)$, où $\lambda \in]0,\pi[$ est un paramètre réel fixé et où $a = 0$, $b = 1$ et $\alpha = \beta = 0$.
Trouver la solution $\bar{u}$ de l'équations d'Euler-Lagrange $(\mathcal{E})$.

3. On suppose toujours que $\lambda \in]0,\pi[$. En appliquant la première question avec $\Phi(t,\eta) = \frac{\lambda}{2}\eta^2 \tan[\lambda(t-1/2)]$ (où $\theta \to \tan(\theta)$ désigne la fonction tangente), montrer que la solution trouvée dans la question précédente est une solution du problème $(\mathcal{P})$.

4. En déduire l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^1 (u'(t))^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 (u(t))^2 dt \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{C}^1([0,1]) \text{ avec } u(0) = u(1) = 0.$$

5. Montrer que, pour $\lambda > \pi$, on a

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{C}^1([0,1]),\\ u(0)=0,\ u(1)=0}} \int_0^1 L(t,u(t),u'(t))dt = -\infty\ .$$

Barême indicatif : Exercice 1 = 5 points, Exercice 2 = 5 points, Exercice 3 = 10 points.

Université Paris Dauphine
Master 1, MMD-MA

Partiel du mars 2017
"Optimisation et programmation dynamique"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. On cherche à résoudre les problèmes suivants.

1. Premier problème :

$$\min_{(x,y)\in K} \big(2x^2+y^2\big), \text{ où } K := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : x+2y=3\big\}$$

a) Montrer que le problème admet une solution.
b) Montrer que la contrainte est qualifiée en tout point dans K.
c) Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème (Théorème Kuhn-Tucker) et en déduire la solution du problème.

2. Les mêmes questions pour le deuxième problème :

$$\max_{(x,y,z)\in K} 3x+2y+z, \quad \text{où } K := \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z\geq 0\Big\}.$$

Exercice 2. Soient $b\in\mathbb{R}^k$, A une matrice de dimension $k\times n$ de rang k, où $k\leq n\in\mathbb{N}$. On définit

$$K \ := \ \{x\in\mathbb{R}^n \ : Ax=b\}$$

On cherche à calculer, pour un point $y\in\mathbb{R}^n$, sa projection $x^*:=\Pi_K(y)$ dans K, qui est, par le cours, l'unique solution du problème :

$$\min_{x\in K}\|y-x\|^2.$$

1. Utiliser Théorème de Kuhn-Tucker, montrer qu'il existe un vecteur $\lambda\in\mathbb{R}^k$, t.q.

$$x^*+A^\top\lambda=y.$$

2. Utilisant le fait que $x^*\in K$, i.e. $Ax^*=b$, en déduire que

$$AA^\top\lambda=Ay-b.$$

3. En déduire ensuite que

$$x^*=\big(I_n-A^\top(AA^\top)^{-1}A\big)y+A^\top(AA^\top)^{-1}b,$$

où I_n est la matrice identique de dimension $n\times n$.

4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1, on considère le problème

$$\min_{x \in K} f(x),$$

   Donner un algorithme itérative pour approximer la solution optimale (sans justification de la convergence).

Exercice 3. Soient A_1, A_2 deux matrices de dimension $k_1 \times n$ et $k_2 \times n$, $b_1 \in \mathbb{R}^{k_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, on admet que

$$\inf \big\{ f(x) \ : A_1 x = b_1, A_2 x \le b_2 \big\} = \sup_{\lambda_1 \in \mathbb{R}^{k_1}, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^{k_2}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \big(f(x) + \lambda_1 \cdot (A_1 x - b_1) + \lambda_2 \cdot (A_2 x - b_2) \big).$$

On considère un problème de transport optimal suivant : Soit $E = \{0, 1\}$, nous avons deux mesures de probabilité μ et ν fixées sur E, t.q. $(\mu(\{0\}), \mu(\{1\})) = (\mu_0, \mu_1) \in (0,1)^2$ et $(\nu(\{0\}), \nu(\{1\})) = (\nu_0, \nu_1) \in (0,1)^2$ avec $\mu_0 + \mu_1 = 1$ et $\nu_0 + \nu_1 = 1$. Soit $f : E \times E \to \mathbb{R}$ une fonction de coût, on considère tous les vecteurs aléatoires possibles (X_0, X_1) sur $E \times E$ t.q. $X_0 \sim \mu$ et $X_1 \sim \nu$ et cherche à résoudre le problème :

$$\min \big\{ \mathbb{E}[f(X_0, X_1)] \ : X_0 \sim \mu, X_1 \sim \nu \big\}. \tag{1}$$

1. On sait que la loi jointe d'un vecteur aléatoire (X_0, X_1) sur $E \times E$ est complètement caractérisée par $(p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}) \in [0,1]^4$ avec $p_{ij} = \mathbb{P}[X_0 = i, X_1 = j]$, $i, j = 0, 1$. Montrer que le problème (1) pourrait être reformulé :

$$P := \inf \big\{ p(f) \ : p_{i0} + p_{i1} = \mu_i, \ p_{0j} + p_{1j} = \nu_j, \ p_{ij} \ge 0, \ \text{pour } i, j = 0, 1 \big\},$$

   où $p(f) := \sum_{i,j=0,1} f(i,j) p_{ij}$.
2. Soient $\phi, \psi : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur E, on introduit

$$d(\phi, \psi) := \mu(\phi) + \nu(\psi) + \inf_{p_{ij} \ge 0, i,j=0,1} \big(p(f) - \sum_{i,j=0,1} p_{ij} (\phi(i) + \psi(j)) \big),$$

   où $\mu(\phi) := \mu_0 \phi(0) + \mu_1 \phi(1)$ et $\nu(\psi) := \nu_0 \psi(0) + \nu_1 \psi(1)$.
   Utilisant la dualité qu'on admet au début de l'énoncé, montrer que

$$P = D := \sup \big\{ d(\phi, \psi) \ : \text{toutes les fonction } \phi, \psi : E \to \mathbb{R} \big\},$$

3. Montrer la dualité finale :

$$P = \sup \big\{ \mu(\phi) + \nu(\psi) \ : \phi(i) + \psi(j) \le f(i,j), \forall i, j = 0, 1 \big\}.$$

   (Remarque : cette dualité est appelé dualité de Kantorovich, qui est vrai pour un espace E beaucoup plus général.)

Barême indicatif : Exercice 1 : 12 points, Exercice 2 : 6 points. Exercise 3 : 6 points.

Université Paris Dauphine
Master 1, MMD-MA

Examen du Mai 2017
"Optimisation et programmation dynamique"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés sauf une fiche A4

Exercice 1. Un agent possède une richesse initiale $x_0 \in \mathbb{R}_+$ à l'instant 0, il consomme en temps continu avec le taux $c(t) > 0$ en $[0, T]$, où $T = 1$. Soit $x(t)$ sa richesse à l'instant t, on a alors $x'(t) = -c(t)$, où $x'(t)$ est la dérivée de la fonction $x(t)$. Dans le cours, un problème de consommation optimale est formulé comme :

$$\sup \Big\{ \int_0^1 e^{-\beta t} u(-x'(t))dt \ : x \in C^1([0,1], \mathbb{R}),\ x(0) = x_0,\ x(1) = 0 \Big\},$$

où $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité. Supposons que le problème admet une solution optimale x_* t.q. $-x'_*(t) > 0$, $t \in [0,1]$.

1. En utilisant le résultat du calcul des variations, donner la condition nécessaire (Equation d'Euler) satisfaite par x_*.
2. Supposons que $u(z) := z^\gamma/\gamma$ avec une constant $\gamma \in (0,1)$, montrer que la condition nécessaire dans la question précédente est équivalente à

$$(1-\gamma)x''_*(t) + \beta x'_*(t) = 0.$$

3. Déterminer $x_*(t)$ en résolvant l'EDO ci-dessus avec les conditions aux bords $x_*(0) = x_0$ et $x_*(1) = 0$.

Exercice 2. Soit $T > 0$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $c = (c_1, c_2) \neq (0,0)$. On considère le problème de maximisation suivant :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \{c_1 y_1(T) + c_2 y_2(T)\},$$

où (y_1, y_2) est solution de

$$y'_k(t) = u_k(t), \quad y_k(0) = x_k, \quad k = 1,2, \quad t \in [0,T],$$

et $\mathcal{U}$ est l'ensemble de processus de contrôle à valeur $U := \{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 \ : u_1^2 + u_2^2 = 1\}$.

1. a) Donner le pré-Hamiltonien du problème $\underline{H}(t,x,p,u)$.
   b) Montrer que si $p \neq 0$, le Hamiltonien est donné par

$$H(t,x,p) = \underline{H}(t,x,p,-\frac{p}{|p|}), \quad \text{avec} \ \ |p| := \sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

c) Donner les conditions nécessaires d'optimalité dans le principe de Pontryagin.
d) Déterminer la solution $(y^*, p^*) = ((y_1^*, y_2^*), (p_1^*, p_2^*))$ en résolvant le système issu des conditions nécessaires ci-dessus.
e) Calculer le contrôle associé $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, et la valeur $J(u^*) := c_1 y_1^*(T) + c_2 y_2^*(T)$ associée.

2. a) Enoncer le principe de la programmation dynamique pour ce problème de contrôle optimal.
b) Enoncer l'équation HJB pour le problème de contrôle optimal.
c) Déterminer une solution de l'équation HJB.
d) Calculer un contrôle optimal "feedback".
e) En déduire que (u_1^*, u_2^*) trouvé par le principe de Pontryaguin est un contrôle optimal.

Exercice 3. On considère un problème de finance en temps discret $t = 0, 1$. A l'instant $t = 0$, le prix d'un actif $S_0 = s_0$ est une constante fixée. A l'instant $t = 1$, le prix S_1 de l'actif a n possibilités de valeur $x_1, \cdots, x_n$, i.e. $S_1 \in \{x_1, \cdots, x_n\}$. Supposons que

$$n \geq 2 \quad \text{et} \quad x_1 \leq s_0 \leq x_n.$$

Un modèle financier est une distribution de S_1 sous laquelle son espérance vaut S_0. Notons

$$\mathcal{M} \ := \ \Big\{ (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n \ : \sum_{k=1}^n p_k = 1 \ \text{ et } \ \sum_{k=1}^n x_k p_k = s_0 \Big\}.$$

Soit $g : \{x_1, \cdots, x_n\} \to \mathbb{R}$ la fonction payoff d'une option dérivée, on considère deux problèmes financiers : le problème primal P est la valeur maximale d'espérance du payoff $g(S_1)$ sous tous les modèles (ou toutes les distributions de S_1), i.e.

$$P \ = \ \sup_{(p_1, \cdots, p_n) \in \mathcal{M}} \ \sum_{k=1}^n g(x_k) p_k;$$

le problème dual est le coût minimal qui permet de sur-répliquer l'option $g(S_1)$ par une stratégie de trading sur (S_0, S_1), i.e.

$$D \ = \ \inf_{(y,H) \in \mathcal{D}} y, \ \text{ où } \ \mathcal{D} := \Big\{ (y, H) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : y + H(x_k - s_0) \geq g(x_k), \ \forall k = 1, \cdots, n \Big\}.$$

Montrer la dualité $P = D$ et qu'il existe une solution $(p_1^*, \cdots, p_n^*)$ et (y^*, H^*) pour les deux problèmes d'optimisation P et D.

Barême indicatif : Exercice 1 : 6 points, Exercice 2 : 10 points. Exercice 3 : 4 points.

Université Paris Dauphine
Master 1, MMD-MA

Partiel du mars 2018
"Optimisation et programmation dynamique"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\max_{(x,y,z)\in K} 2x+3y+2z, \quad \text{où } K := \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z\geq 0\Big\}.$$

1. Montrer que le problème admet une solution.
2. Montrer que la contrainte est qualifiée en tout point dans K.
3. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème (Théorème Kuhn-Tucker) et en déduire la solution du problème.

Exercice 2. On considère un problème motivé par une application de la méthode de stratification de Monte-Carlo. Soient X et $(X_k)_{1\leq k\leq K}$ des variables aléatoires, telles que $\mathbb{E}[X]=\sum_{k=1}^K p_k\mathbb{E}[X_k]$, où $p_k>0$ et $\sum_{k=1}^K p_k=1$. Pour estimer la valeur de $\mathbb{E}[X]$, on simule n_k copies i.i.d. $(X_{k,i})_{i=1,\cdots,n_k}$ de la variable X_k, et propose l'estimateur

$$\widehat{U} := \sum_{k=1}^K \Big(p_k\frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} X_{k,i}\Big).$$

Il est évident que l'effort de simulation et de calcul de cet estimateur est $\sum_{k=1}^K n_k$. Pour optimiser le comportement de l'estimateur, on chercher à minimiser la variance de $\widehat{U}$ parmi tous les choix de n_k sous contrainte de l'effort total $\sum_{k=1}^K n_k=n$ pour un n fixé. Le problème d'optimisation est donc

$$\widehat{V} \ := \ \inf\Big\{\sum_{k=1}^K \frac{p_k^2\sigma_k^2}{n_k} \ : \ n_k>0,\ \sum_{k=1}^K n_k=n\Big\},$$

où n, p_k, σ_k^2 :=Var$[X_k]$ sont des constantes fixées. Ensuite, notons $q_k := \frac{n_k}{n}$, on peut reformuler le problème :

$$\widehat{V} \ = \ \inf_q\Big\{\sum_{k=1}^K \frac{p_k^2\sigma_k^2}{q_k} \ : \ \sum_{k=1}^K q_k=1,\ q_k>0,\ k=1,\cdots,K\Big\}.$$

Enfin, on suppose que $p_k>0$ et $\sigma_k>0$ pour $k=1,\cdots,K$.

1. Rappelons que $\sum_{k=1}^K p_k=1$. Montrer que $\widehat{V}\leq\widehat{V}_0 := \sum_{k=1}^K p_k\sigma_k^2$.

2. Soit $\varepsilon := \min_{1\le k\le K} \frac{p_k^2\sigma_k^2}{V_0}$, montrer que le problème de $\widehat{V}$ est équivalent à

$$\widehat{V} \;=\; \inf\Big\{ \sum_{k=1}^K \frac{p_k^2\sigma_k^2}{q_k} \;:\; \sum_{k=1}^K q_k = 1,\; q_k \ge \varepsilon/2,\; k=1,\cdots,K\Big\} \tag{1}$$

3. Montrer qu'il existe une solution optimale $(q_k^*)_{1\le k\le K}$ pour le Problème (1).
4. Soit $q^* = (q_k^*)_{1\le k\le K}$ une solution optimale, montrer que $q_k^* > \varepsilon/2$ et que la contrainte du Problème (1) est qualifiée en q^*.
5. En utilisant le théorème de Kuhn et Tucker, montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$, tel que

$$\frac{\partial}{\partial q_k} G(q,\lambda) = 0,\ \forall k=1,\cdots,K, \quad \text{où}\ \ G(q,\lambda) := \sum_{k=1}^K \frac{p_k^2\sigma_k^2}{q_k} + \lambda\Big(\sum_{k=1}^K q_k - 1\Big).$$

6. Calculer $(q_k^*)_{1\le k\le K}$ explicitement.

Exercice 3. Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que ∇f est continu, borné. Supposons qu'il existe un point $x^*\in\mathbb{R}^n$, tel que

$$(x-x^*)\cdot\nabla f(x) > 0, \quad \forall x\ne x^*. \tag{2}$$

On utilise l'algorithme de gradient suivant pour approcher x^* : fixer un $x_0\in\mathbb{R}^n$ arbitraire et puis itérer ainsi :

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_{k+1}\nabla f(x_k), \quad \forall k\ge 0.$$

Ici $(\gamma_k)_{k\ge 0}$ est une suite de constantes positives telles que

$$\sum_{k=0}^\infty \gamma_k^2 < \infty, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^\infty \gamma_k = \infty.$$

L'objectif de cet exercise est de montrer que $x_k\to x^*$ lorsque $k\to\infty$.

1. En utilisant la condition (2), montrer que $|x_{k+1}-x^*|^2 \le |x_k-x^*|^2 + \gamma_{k+1}^2|\nabla f(x_k)|^2$.
2. Notons

$$v_n := |x_n-x^*|^2 - \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 |\nabla f(x_{k-1})|^2.$$

   Montrer que $(v_n)_{n\ge 1}$ est une suite décroissante et bornée inférieurement. En déduire que la limite $\ell := \lim_{n\to\infty}|x_n-x^*|^2$ existe.
3. On va prouver que $\ell=0$ par contradiction. Supposons que $\ell>0$.
   a) Montrer que

$$\eta := \inf_{\ell/2\le|x-x^*|\le 2\ell} (x-x^*)\cdot\nabla f(x) > 0.$$

   b) Rappelons que par la définition de ℓ, il existe une constante N telle que $\ell/2 \le |x_n-x^*| \le 2\ell$ pour tout $n\ge N$. En déduire que

$$\sum_{n\ge 1}\gamma_n(x_{n-1}-x^*)\cdot\nabla f(x_{n-1}) = \infty.$$

Université Paris Dauphine
Master 1, MMD-MA

Examen du Mai 2018
"Optimisation et programmation dynamique"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés (sauf une feuille A4 recto-verso)

Exercice 1. Résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\max\Big\{\sum_{i=0}^{2} L_i(x_i, x_{i+1}) \ : x_{i+1} \in \Gamma_i(x_i)\Big\},$$

où

$$x_0 = 3; \qquad \begin{cases} L_0(x_0, x_1) = \log(1 + x_1^2) - x_0 x_1^2 - 6x_1^4, \\ L_1(x_1, x_2) = 2(x_1 x_2)^2, \\ L_2(x_2, x_3) = 4x_2 x_3 - 3x_3^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Gamma_0(x_0) = [1, \sqrt{x_0}], \\ \Gamma_1(x_1) = [-\sqrt{3}|x_1|, |x_1|], \\ \Gamma_2(x_2) = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 2. On considère le problème suivant :

$$v(x_0) \ := \ \max_{u\in\mathcal{U}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L(x_{t+1}),$$

où $\mathcal{U}$ est l'ensemble de tous les processus $(u_t)_{t\geq 0}$ à valeur dans $[-1, 1]$, et la dynamique du process contrôlé $(x_t)_{t\geq 0}$ est donnée par $x_{t+1} = f(x_t, u_t)$, avec

$$f(x_t, u_t) \ := \ (x_t - 1) \vee u_t \wedge (x_t + 1) \ := \ \max\big((x_t - 1), \min(u_t, (x_t + 1))\big),$$

et

$$L(x) := -x\mathbf{1}_{\{x\in[-1,0]\}} + 2x\mathbf{1}_{\{x\in(0,1]\}}.$$

1. Ecrire le principe de la programmation dynamique vérifié par la fonction valeur v. La solution est elle unique ? Continue ?
2. Pour $\beta > \frac{1}{2}$, montrer que $v(x) = \frac{2}{1-\beta} + \min(0, 2x)$ et donner le contrôle optimal.
3. Determiner v et le contrôle optimal dans le cas $\beta = \frac{1}{4}$.

Exercice 3. Soient a, b, c, d des fonctions continues et strictement positives, définies sur $[0, 1]$, on considère le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} J(u) \ \text{ avec } \ J(u) := \int_0^T \Big(c(t)x^2(t) + d(t)u^2(t)\Big)dt,$$

où $\mathcal{U}$ est l'ensemble de processus de contrôle $(u(t))_{t\in[0,T]}$ à valeur dans $U := \mathbb{R}$, et $x(t)$ est la solution de

$$x(0) := x_0, \qquad \frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t) + b(t)u(t), \quad t \in [0, T].$$

1. a) Donner le pré-Hamiltonien du problème $\underline{H}(t, x, p, u)$.
   b) Calculer le Hamiltonien $H(t, x, p)$.
   c) Soit $u^*(t)$ est un contrôle optimal et $x^*(t)$ la solution optimale, donner les conditions nécessaires d'optimalité dans le principe de Pontryagin.
   Ces conditions nécessaires portent sur une couple de fonctions $(x^*(t), p(t))$.
   d) Montrer que la couple $(x^*(t), p(t))$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \exp\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)\begin{pmatrix} x_0 \\ p(0) \end{pmatrix},$$

   avec une matrice $A(s)$ de dimension 2×2.
   Expliciter la matrice $A(s)$.
   e) Supposons que $a \equiv 0$, $b \equiv 1$ et $c \equiv d \equiv \frac{1}{2}$, montrer que la couple $(x^*(t), p(t))$ est donnée par

$$\begin{cases} x^*(t) = x_0 \cosh(t) - p(0) \sinh(t) \\ p(t) = -x_0 \sinh(t) + p(0) \cosh(t), \end{cases} \qquad \text{avec} \begin{cases} \sinh(t) = (e^t - e^{-t})/2 \\ \cosh(t) = (e^t + e^{-t})/2. \end{cases}$$

   En utilisant la condition vérifiée par $p(T)$ dans les conditions nécessaires, calculer $p(0)$.
   f) Dans le context de la question e), calculer le contrôle optimal u^* et calculer la valeur $J(u^*)$.

2. L'approche de la programmation dynamique :

   On suppose dans la suite que $a \equiv 0$, $b \equiv 1$ et $c \equiv d \equiv \frac{1}{2}$.

   a) Enoncer le principe de la programmation dynamique pour ce problème de contrôle optimal.
   b) Enoncer l'équation HJB pour le problème de contrôle optimal.
   c) Supposons que la solution d'HJB est donnée par $u(t, x) = \rho(t)x^2$, en déduire une EDO vérifiée par $\rho(t)$. Résoudre l'EDO sur $\rho(t)$ et en déduire une solution de l'équation HJB.
   d) Calculer un contrôle optimal "feedback".
   e) En déduire que u^* trouvé par le principe de Pontryaguin est un contrôle optimal.

Barême indicatif : Exercice 1 : 4 points, Exercice 2 : 6 points. Exercise 3 : 10 points.

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
Master de Mathématiques Appliquées

Optimisation et programmation dynamique
Année 2018/2019

Examen Partiel du 19 Mars 2019

- Durée : 2 heures
- Les documents de cours, calculatrices, téléphones et ordinateurs sont interdits.
- Une rédaction claire et précise sera cruciale pour avoir tous les points.
- Le barême est orientatif.

Exercice 1: Projection translatée (1+2=3 points/22).
Soit K un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. Rappeler la définition de l'opérateur de projection sur K, que l'on notera P_K.
2. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$P_{v+K}(x) = v + P_K(x - v), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 2: Solution d'un problème d'optimisation (2+3=5 points/22).
On considère le problème d'optimisation à deux variables $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ suivant :

$$\min_{\substack{x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq -1}} \quad x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$$

1. Montrer, sans la calculer, que le problème admet au moins une solution.
2. Calculer une solution du problème en utilisant les conditions d'optimalité (dont on justifiera l'utilisation).

Exercice 3: Dualité (4 points/22). Résoudre par duallité le problème suivant

$$\min_{\substack{x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq -1}} \quad x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2.$$

Pour cela, on pourra prouver que

$$\mathcal{G}(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \mathcal{L}(x, \lambda) = -\frac{\lambda_1^2}{3} - \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Exercice 4: Problème (10 points/22).
Soit un ensemble de n fonctions d'une variable $(f_1, \dots, f_n)$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et soit la fonction de n variables définie sur I^n par

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n).$$

1. Montrer que si chaque f_i est strictement convexe, alors f est aussi strictement convexe.
2. On suppose dans toute la suite que les f_i sont des fonctions continues strictement convexes définies sur $I =]0, +\infty[$ et telles que $\lim_{t \to 0} f_i(t) = +\infty$.
   (a) Montrer que le problème de minimisation

   $$\min_{\substack{x_1, \dots, x_n > 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i \le 1}} f(x_1, \dots, x_n), \tag{0.1}$$

   est équivalent au problème

   $$\min_{\substack{x_1, \dots, x_n \ge \varepsilon \\ \sum_{i=1}^n x_i \le 1}} f(x_1, \dots, x_n), \tag{0.2}$$

   lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit.

   (b) Montrer qu'il existe une unique solution au problème (0.2), qui est aussi l'unique solution de (0.1) lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. On note $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ sa solution.
3. On suppose en plus que le fonctions f_i sont dérivables et strictement décroissantes.
   (a) Montrer que lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, la seule contrainte active dans le problème (0.2) est $x_1 + \cdots + x_n \le 1$, c'est à dire que l'on a $x_1^* + \cdots + x_n^* = 1$ et $x_i^* > \varepsilon$.

   (b) Montrer que les $f'(x_i^*)$ sont tous égaux.
4. On considère les cas particuliers
   (i) $f_i(t) = -p_i \log(t)$
   (ii) $f_i(t) = p_i / t$

   où les p_i sont des nombres strictement positifs. Montrer que les résultats obtenus s'appliquent à ces deux cas et donner l'expression de la solution $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ en fonction de $(p_1, \dots, p_n)$.
5. Calculer la solution du problème suivant dans $\mathbb{R}^3$

$$\max_{\substack{x,y,z > 0 \\ x+y+z \le 1}} x^3 y^4 z^5.$$

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
Master de Mathématiques Appliquées

Optimisation et programmation dynamique
Année 2018/2019

Examen du 27 Mai 2019

- Durée : 2 heures
- Feuille A4 recto avec résultats du cours autorisée.
- Autres documents (livres, poly de cours, calculatrices, téléphones et ordinateurs) interdits.
- Une rédaction claire et précise sera cruciale pour avoir tous les points.
- Le barême est orientatif.

Exercice 1: Optimisation statique (5 points /20).
On considère le problème de minimisation sur $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$\inf_{\sum_{i=1}^n x_i^4 \leq 1} -\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

1. Montrer, sans la calculer, que le problème admet au moins une solution. **[1 pt]**
2. Montrer que le minimum vaut $-\sqrt{n}$ et qu'il est atteint en 2^n points. On pourra pour cela utiliser les conditions d'optimalité (dont on justifiera l'utilisation). **[4 pt]**

Exercice 2: Programmation dynamique en temps discret (6 points /20).
Résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\max\{\sum_{i=0}^2 L_i(x_i, x_{i+1}) \ : \ x_{i+1} \in \Gamma_i(x_i)\},$$

où

$$x_0 \geq 0, \qquad \begin{cases} L_0(x_0, x_1) & = -(x_1 - x_0)^3 \\ L_1(x_1, x_2) & = x_1 x_2^2 - \frac{1}{2} x_2^3 \\ L_2(x_2, x_3) & = 2x_2^2 x_3 - 2x_3^2 x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Gamma_0(x_0) & = [1/2, 1 + x_0] \\ \Gamma_1(x_1) & = [1/3, x_1] \\ \Gamma_2(x_2) & = [-3, 2x_2] \end{cases}$$

Pour chaque $x_0 \geq 0$, donner l'ensemble des politiques (x_1, x_2, x_3) optimales.

Exercice 3: Calcul des variations (3 points /20).
On cherche à résoudre

$$\inf_{x \in \mathcal{A}} \int_0^1 \left(\dot{x}^2(t) + 4x^2(t) + 16tx(t)\right) \mathrm{d}t$$

avec

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \ : \ x(0) = 1, \ x(1) = -2\}$$

1. Écrire l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème. **[1 pt]**
2. Trouver la ou les solutions du problème. **[2 pt]**

Exercice 4: Contrôle optimal (6 points /20).
Soit $T > 0$. On considère le problème de minimisation suivant

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u), \quad \text{avec} \quad J(u) := \int_0^T \left(\frac{3}{2} x^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t) \right) \mathrm{d}t - \frac{1}{2} x^2(T)$$

où $\mathcal{U}$ est l'ensemble de processus de contrôle $(u(t))_{t \in [0,1]}$ à valeurs dans $U = \mathbb{R}$, et $x(t)$ est la solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = x(t) + u(t), \\ x(0) & = x_0. \end{cases}$$

1. Calculer le Hamitonien du système $H(t, x, p)$. **[1 pt]**
2. Soit $u^*(t)$ un contrôle optimal et $x^*(t)$ une solution optimale. Donner les conditions nécessaires d'optimalité par le principe de Pontryagin. On rappelle que ces conditions portent sur le couple (x^*, p^*) où p^* peut être vu comme un état adjoint à x^*. **[1 pt]**
3. Résoudre ce système. **[2 pt]**
4. En déduire le contrôle optimal u^* ainsi que la valeur $J(u^*)$. **[1 pt]**
5. Expliquer en quelques lignes comment aborder le problème par l'approche de la programmation dynamique. **[1 pt]**