Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Examen du 23 mai 2016
"Optimisation et programmation dynamique"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. On cherche à résoudre le problème :

$$(\mathcal{P}) \qquad \min\left\{x(y-1) \text{ où } (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leq x\leq y\right\}.$$

1. Montrer que la valeur du minimum est négative ou nulle.
2. En déduire que le problème admet au moins une solution.
3. Calculer la ou les solutions du problème.

Exercice 2. On considère le problème de contrôle optimal en temps discret

$$\sup\left\{\sum_{n=0}^{N-1} L(x_n,x_{n+1}),\quad \begin{array}{l}(x_n)_{n=0,\dots,N}\in[0,1]^{N+1},\ x_0=x,\\ x_{n+1}\in[0,x_n]\ \forall n=0,\dots,N-1\end{array}\right\}$$

où $N\in\mathbb{N}^*$, $x\in[0,1]$ sont fixés et où L est définie par

$$L(x,y)=\sqrt{x-y}+\sqrt{y} \qquad \text{si } 0\leq y\leq x\leq 1.$$

En utilisant le principe de programmation dynamique, montrer que la valeur $V(t,x)$ du problème s'écrit sous la forme $V(t,x)=\alpha_t\sqrt{x}$ où l'on donnera α_N et où l'on écrira une relation de récurrence entre α_t et α_{t+1}.

Exercice 3. On considère un problème général de calcul des variations

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{\substack{u\in\mathcal{C}^1([a,b]),\\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta}} \int_a^b L(t,u(t),u'(t))dt$$

où a,b,α,β sont des réels donnés, avec $a<b$ et où $L:[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On rappelle que toute minimum $\bar u$ de ce problème vérifie l'équation d'Euler-Lagrange :

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{d}{dt}\left[L_\xi(t,\bar u(t),\bar u'(t))\right]=L_\eta(t,\bar u(t),\bar u'(t)), \qquad \bar u(a)=\alpha\ ,\ \bar u(b)=\beta\ ,$$

où on note, pour toute fonction $L=L(t,\eta,\xi)$, $L_\xi=\frac{\partial L}{\partial\xi}$, $L_\eta=\frac{\partial L}{\partial\eta}$ et $L_t=\frac{\partial L}{\partial t}$.

L'objet de cet exercice est d'étudier la réciproque à cette question. Rappelons que, si $(\eta,\xi)\to L(t,\eta,\xi)$ est une fonction convexe pour tout $t\in[a,b]$, alors la réciproque est vraie : toute solution $\bar u\in\mathcal{C}^1([a,b])$ de l'équation $(\mathcal{E})$ est solution de $(\mathcal{P})$.

1. On suppose qu'il existe une fonction $\Phi : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^3$, telle que $\Phi(a,\alpha) = \Phi(b,\beta)$ et telle que la fonction

$$\widetilde{L}(t,\eta,\xi) = L(t,\eta,\xi) + \Phi_\eta(t,\eta)\xi + \Phi_t(t,\eta)$$

vérifie : $(\eta,\xi) \to \widetilde{L}(t,\eta,\xi)$ est une fonction convexe pour tout $t \in [a,b]$.
i) Montrer d'abord que toute solution $\bar{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ de l'équation $(\mathcal{E})$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à $\widetilde{L}$.
ii) Vérifier que, pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^1$ telle que $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$, on a

$$\int_a^b L(t,u(t),u'(t))dt = \int_a^b \widetilde{L}(t,u(t),u'(t))dt.$$

iii) En déduire que toute solution $\bar{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ de l'équation $(\mathcal{E})$ est minimum de $(\mathcal{P})$.

2. On considère *à partir de maintenant* le cas où $L(t,\eta,\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \lambda^2\eta^2)$, où $\lambda \in]0,\pi[$ est un paramètre réel fixé et où $a = 0$, $b = 1$ et $\alpha = \beta = 0$.
Trouver la solution $\bar{u}$ de l'équations d'Euler-Lagrange $(\mathcal{E})$.

3. On suppose toujours que $\lambda \in]0,\pi[$. En appliquant la première question avec $\Phi(t,\eta) = \frac{\lambda}{2}\eta^2 \tan[\lambda(t - 1/2)]$ (où $\theta \to \tan(\theta)$ désigne la fonction tangente), montrer que la solution trouvée dans la question précédente est une solution du problème $(\mathcal{P})$.

4. En déduire l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^1 (u'(t))^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 (u(t))^2 dt \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{C}^1([0,1]) \text{ avec } u(0) = u(1) = 0.$$

5. Montrer que, pour $\lambda > \pi$, on a

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{C}^1([0,1]),\\ u(0)=0,\ u(1)=0}} \int_0^1 L(t,u(t),u'(t))dt = -\infty .$$

Barême indicatif : Exercice 1 = 5 points, Exercice 2 = 5 points, Exercice 3 = 10 points.