Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Ebauche de corrigé de l'Examen du 23 mai 2016
"Optimisation et programmation dynamique"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. On cherche à résoudre le problème :

$$(\mathcal{P}) \qquad \min\left\{x(y-1) \text{ où } (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\le x\le y\right\}.$$

1. Montrer que la valeur du minimum est négative ou nulle.
2. En déduire que le problème admet au moins une solution.
3. Calculer la ou les solutions du problème.

Solution. Posons $f(x,y)=x(y-1)$, $g_1(x,y)=-x$, $g_2(x,y)=x-y$ *et* $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\le x\le y\}$ *l'ensemble de contraintes.*

1. *On note que* $(0,0)\in K$ *et* $f(0,0)=0$. *On en déduit que*

$$\inf_{(x,y)\in K} f(x,y)\le f(0,0)=0.$$

2. *Notons que si* $(x,y)\in K$ *avec* $y\ge 1$, *on a* $f(x,y)\ge 0=f(0,0)$. *Donc*

$$\inf_{(x,y)\in K} f(x,y)\le f(0,0)=\inf_{(x,y)\in K,\ y\le 1} f(x,y).$$

Or l'ensemble $\tilde K:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\le x\le y\le 1\}$ *est fermé, borné et donc compact dans* $\mathbb{R}^2$ *tandis que* f *est continue sur* $\tilde K$. *Donc* f *a un minimum sur* $\tilde K$ *en un point* $(\bar x,\bar y)$. *Alors*

$$f(\bar x,\bar y)=\inf_{(x,y)\in K,\ y\le 1} f(x,y)=\inf_{(x,y)\in K} f(x,y),$$

ce qui prouve que $(\bar x,\bar y)$ *est un minimum de* f *sur* K *puisque* $(\bar x,\bar y)\in\tilde K\subset K$.

3. *On remarque que les fonctions* g_1 *et* g_2 *sont affines, donc la contrainte est qualifiée en tout point. La fonction* f *étant* C^1 *on peut appliquer les conditions KKT : si* (x,y) *est un minimum de* f *sur* K, *il existe* $\lambda_1,\lambda_2\ge 0$ *tels que*

$$\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g_1(x,y)+\lambda_2\nabla g_2(x,y)=0,\ \lambda_1 f_1(x,y)+\lambda_2 f_2(x,y)=0,$$

soit

$$\begin{cases} y-1-\lambda_1+\lambda_2=0\\ x-\lambda_2=0\\ \lambda_1 x=0\\ \lambda_2(x-y)=0\end{cases}$$

On distingue 4 cas : 1) aucune contrainte saturée. Alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ce qui donne $x = 0$, $y = 1$. Impossible puisque $x = 0$ sature la première contrainte. 2) la première contrainte seule est saturée. Alors $x = 0$, $\lambda_2 = 0$, ce qui donne $y = 1 + \lambda_2 \geq 1$. Dans ce cas $f(0, y) = 0$. 3) la seconde contrainte seule est saturée. Alors $x = y$, $\lambda_1 = 0$, ce qui donne $\lambda_2 = x = y = 1 - \lambda_2$. D'où $\lambda_2 = 1/2$ et $x = y = 1/2$. Notons que $f(1/2, 1/2) = -1/4$. Finalement, les deux contraintes sont saturée, ce qui donne $0 = x = y$, avec $f(0, 0) = 0$. On conclut donc que le minimum est en $(-1/2, -1/2)$.

Exercice 2. On considère le problème de contrôle optimal en temps discret

$$\sup \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} L(x_n, x_{n+1}), \quad \begin{array}{l} (x_n)_{n=0,\ldots,N} \in [0,1]^{N+1}, \ x_0 = x, \\ x_{n+1} \in [0, x_n] \ \forall n = 0, \ldots, N-1 \end{array} \right\}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$ sont fixés et où L est définie par

$$L(x, y) = \sqrt{x - y} + \sqrt{y} \qquad \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1.$$

En utilisant le principe de programmation dynamique, montrer que la valeur $V(t, x)$ du problème s'écrit sous la forme $V(t, x) = \alpha_t \sqrt{x}$ où l'on donnera α_N et où l'on écrira une relation de récurrence entre α_t et α_{t+1}.

Solution : La fonction valeur du problème est définie par

$$V(t, x) = \left\{ \sum_{n=t}^{N-1} L(x_n, x_{n+1}), \quad \begin{array}{l} (x_n)_{n=t,\ldots,N} \in [0,1]^{N+1-t}, \ x_t = x, \\ x_{n+1} \in [0, x_n] \ \forall n = t, \ldots, N-1 \end{array} \right\}$$

Notons qu'avec cette définition, $V(N, x) = 0$ puisqu'il n'y a pas de coût terminal. Le principe de programmation dynamique s'écrit

$$V(t, x) = \sup \{ L(x, y) + V(t+1, y), \ y \in [0, x] \}$$

(on rappelle qu'on passe de l'inf donné dans le cours au sup en mettant des $-$ partout). On raisonne maintenant par récurrence pour montrer que $V(t, x) = \alpha_t \sqrt{x}$. Le résultat est vrai pour $t = N$, avec $\alpha_N = 0$. Si le résultat est vrai au rang $t + 1$, alors, par programmation dynamique,

$$V(t, x) = \sup \left\{ \sqrt{x - y} + (1 + \alpha_{t+1}) \sqrt{y}, \ y \in [0, x] \right\}$$

La fonction $y \to \sqrt{x - y} + (1 + \alpha_{t+1}) \sqrt{y}$ est concave sur $[0, x]$. Si on trouve un point où la dérivée est nulle, ce point est alors le maximum du problème. Or la dérivée est $-(1/2)(x - y)^{-1/2} + (1/2)(1 + \alpha_{t+1}) y^{-1/2}$, qui s'annule si $y = (1 + \alpha_{t+1})^2 (x - y)$, soit, en posant $\theta = (1 + \alpha_{t+1})^2$, $y = \frac{\theta x}{1 + \theta}$. On en déduit que

$$V(t, x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \theta}} + \sqrt{\theta} \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{1 + \theta}} \sqrt{x} = \sqrt{1 + \theta} \sqrt{x}.$$

En reprenant la définition de θ, on peut conclure par récurrence décroissante que $V(t, x) = \alpha_t \sqrt{x}$ avec

$$\alpha_t = \sqrt{1 + (1 + \alpha_{t+1})^2}.$$

Exercice 3. On considère un problème général de calcul des variations

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{\substack{u \in \mathcal{C}^1([a,b]),\\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta}} \int_a^b L(t,u(t),u'(t))dt$$

où a, b, α, β sont des réels donnés, avec $a < b$ et où $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On rappelle que toute minimum $\bar{u}$ de ce problème vérifie l'équation d'Euler-Lagrange :

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{d}{dt}\left[L_\xi(t,\bar{u}(t),\bar{u}'(t))\right] = L_\eta(t,\bar{u}(t),\bar{u}'(t)), \qquad \bar{u}(a)=\alpha\ ,\ \bar{u}(b)=\beta\ ,$$

où on note, pour toute fonction $L = L(t,\eta,\xi)$, $L_\xi = \frac{\partial L}{\partial \xi}$, $L_\eta = \frac{\partial L}{\partial \eta}$ et $L_t = \frac{\partial L}{\partial t}$.

L'objet de cet exercice est d'étudier la réciproque à cette question. Rappelons que, si $(\eta,\xi) \to L(t,\eta,\xi)$ est une fonction convexe pour tout $t \in [a,b]$, alors la réciproque est vraie : toute solution $\bar{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ de l'équation $(\mathcal{E})$ est solution de $(\mathcal{P})$.

1. On suppose qu'il existe une fonction $\Phi : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^3$, telle que $\Phi(a,\alpha) = \Phi(b,\beta)$ et telle que la fonction

$$\widetilde{L}(t,\eta,\xi) = L(t,\eta,\xi) + \Phi_\eta(t,\eta)\xi + \Phi_t(t,\eta)$$

vérifie : $(\eta,\xi) \to \widetilde{L}(t,\eta,\xi)$ est une fonction convexe pour tout $t \in [a,b]$.
i) Montrer d'abord que toute solution $\bar{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ de l'équation $(\mathcal{E})$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à $\widetilde{L}$.
ii) Vérifier que, pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^1$ telle que $u(a)=\alpha$, $u(b)=\beta$, on a

$$\int_a^b L(t,u(t),u'(t))dt = \int_a^b \widetilde{L}(t,u(t),u'(t))dt.$$

iii) En déduire que toute solution $\bar{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ de l'équation $(\mathcal{E})$ est minimum de $(\mathcal{P})$.

2. On considère *à partir de maintenant* le cas où $L(t,\eta,\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \lambda^2\eta^2)$, où $\lambda \in]0,\pi[$ est un paramètre réel fixé et où $a=0$, $b=1$ et $\alpha=\beta=0$.
Trouver la solution $\bar{u}$ de l'équations d'Euler-Lagrange $(\mathcal{E})$.

3. On suppose toujours que $\lambda \in]0,\pi[$. En appliquant la première question avec $\Phi(t,\eta) = \frac{\lambda}{2}\eta^2 \tan\left[\lambda(t-1/2)\right]$ (où $\theta \to \tan(\theta)$ désigne la fonction tangente), montrer que la solution trouvée dans la question précédente est une solution du problème $(\mathcal{P})$.

4. En déduire l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^1 (u'(t))^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 (u(t))^2 dt \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{C}^1([0,1]) \text{ avec } u(0)=u(1)=0.$$

5. Montrer que, pour $\lambda > \pi$, on a

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{C}^1([0,1]),\\ u(0)=0,\ u(1)=0}} \int_0^1 L(t,u(t),u'(t))dt \ = \ -\infty\ .$$

Solution :

1. *i) Notons d'abord que*

$$\widetilde{L}_\xi(t,\eta,\xi) = L_\xi(t,\eta,\xi) + \Phi_\eta(t,\eta) \text{ et } \widetilde{L}_\eta(t,\eta,\xi) = L_\eta(t,\eta,\xi) + \Phi_{\eta,\eta}(t,\eta)\xi + \Phi_{\eta,t}(t,\eta,\xi)$$

(où on a noté $\Phi_{\eta,\eta} = \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Phi$, etc...). Donc, si $\bar{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange $(\mathcal{E})$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\widetilde{L}_\xi(t,\bar{u}(t),\bar{u}'(t))\right) &= \frac{d}{dt}\left(L_\xi(t,\bar{u}(t),\bar{u}'(t))\right) + \frac{d}{dt}\left(\Phi_\eta(t,\bar{u}(t),\bar{u}'(t))\right) \\
&= L_\eta(t,\bar{u}(t),\bar{u}'(t)) + \Phi_{t,\eta}(t,\bar{u}(t)) + \Phi_{\eta,\eta}(t,\bar{u}(t))u'(t) \\
&= \widetilde{L}_\eta(t,\bar{u}(t),\bar{u}'(t))
\end{aligned}$$

où pour la seconde égalité, on a utilisé d'abord le fait que $\bar{u}$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange pour L puis le théorème de dérivation des fonctions composées, et pour la dernière le calcul de $\widetilde{L}_\eta$. Donc $\bar{u}$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange pour $\tilde{L}$.

ii) Soit $u \in \mathcal{C}^1$ telle que $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$. Notons que

$$\widetilde{L}(t,u(t),u'(t)) - L(t,u(t),u'(t)) = \Phi_\eta(t,u(t))u'(t) + \Phi_t(t,u(t)) = \frac{d}{dt}\left(\Phi(t,u(t))\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \tilde{L}(t,u(t),u'(t))dt - \int_a^b L(t,u(t),u'(t))dt \\
&\qquad = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\Phi(t,u(t))\right)dt = \Phi(b,u(b)) - \Phi(a,u(a)) = \Phi(b,\beta) - \Phi(a,\alpha) = 0
\end{aligned}$$

puisqu'on a supposé que $\Phi(b,\beta) = \Phi(a,\alpha)$.

iii) Si $\bar{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$, alors d'après (i) u est solution d'Euler-Lagrange pour $\tilde{L}$. Or $(\eta,\xi) \to \tilde{L}(x,\eta,\xi)$ est convexe, et donc $\bar{u}$ minimise le problème $(\mathcal{P})$ où L est remplacé par $\tilde{L}$. Mais d'après (ii), $\int_a^b \tilde{L}(t,u(t),u'(t))dt = \int_a^b L(t,u(t),u'(t))dt$ pour tout u tel que $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$. Donc $\bar{u}$ est également un minimum de $(\mathcal{P})$.

2. *Si $L(t,\eta,\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \lambda^2\eta^2)$, alors*

$$L_\xi(t,\eta,\xi) = \xi, \qquad L_\eta(t,\eta,\xi) = -\lambda^2\eta.$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit donc $\frac{d}{dt}u'(t) = -\lambda^2 u(t)$, soit $u''(t) = -\lambda^2 u(t)$ pour $t \in [0,1]$. Les solutions de cette EDO sont connues : il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $u(t) = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t)$. Or $u(0) = u(1) = 0$, ce qui impose que $A = 0$ (pour $t = 0$) et $B\sin(\lambda) = 0$. Or $\lambda \in]0,\pi[$ et donc $\sin(\lambda) > 0$. On en déduit que $B = 0$. La solution solution de l'équation d'Euler-Lagrange est donc $u(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

3. *Pour appliquer la première question, il suffit de prouver que* $\Phi(0,0) = \Phi(1,0) = 0$ *(ce qui est bien le cas) et que* $\tilde{L}$ *est convexe. Ici*

$$\tilde{L}(t,\eta,\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \lambda^2\eta^2) + \lambda\eta\xi\tan\left[\lambda(t-1/2)\right] + \frac{\lambda^2}{2}\eta^2(1+\tan^2\left[\lambda(t-1/2)\right])$$

puisque $\tan' = 1 + \tan^2$. *Calculons la matrice Hessienne de* $\tilde{L}$ *par rapport à* (η,ξ). *On obtient*

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda\tan\left[\lambda(t-1/2)\right] \\ \lambda\tan\left[\lambda(t-1/2)\right] & \lambda^2\tan^2\left[\lambda(t-1/2)\right] \end{pmatrix},$$

qui est une matrice semi-définie positive (determinant nul, trace positive). Donc $\tilde{L}$ *est convexe en* (η,ξ) *et on conclut d'après la question 1 que la solution* $\bar{u} \equiv 0$ *est une solution du problème* $(\mathcal{P})$.

4. *Comme* $\bar{u} \equiv 0$ *est une solution du problème* $(\mathcal{P})$, *on a pour tout* $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ *avec* $u(0) = u(1) = 0$ *:*

$$\int_0^1 (u'(t))^2 - \lambda^2(u(t))^2\,dt \geq \int_0^1 (\bar{u}'(t))^2 - \lambda^2(\bar{u}(t))^2\,dt = 0.$$

Donc

$$\int_0^1 (u'(t))^2 dt \geq \lambda^2 \int_0^1 (u(t))^2\,dt.$$

Ceci est vrai pour tout $\lambda \in]0,\pi[$ *et en faisant tendre* λ *vers* π^-, *on obtient le résultat désiré :*

$$\int_0^1 (u'(t))^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 (u(t))^2\,dt.$$

5. *Considérons* $u_A(t) = A\sin(\pi t)$ *pour* $A \in \mathbb{R}$. *Alors* $u_A(0) = u_A(1) = 0$ *et*

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u_A'(t))^2 - \lambda^2(u_A(t))^2\,dt = \frac{A^2}{2}\int_0^1 \pi^2\cos^2(\pi t) - \lambda^2\sin^2(\pi t)dt = \frac{A^2}{4}(\pi^2-\lambda^2)$$

car

$$\int_0^1 \sin^2(\pi t)dt = \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi t)}{2}dt = 1/2 \text{ et } \int_0^1 \cos^2(\pi t)dt = \int_0^1 \frac{\cos(2\pi t)+1}{2}dt = 1/2.$$

Lorsque $A \to +\infty$, *on a, puisque* $\lambda > \pi$,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u_A'(t))^2 - \lambda^2(u_A(t))^2\,dt = \frac{A^2}{4}(\pi^2-\lambda^2) \to -\infty$$

et donc l'infimum du problème est $-\infty$.