Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Partiel du 29/10/2019
"Optimisation et programmation dynamique"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{\substack{-x^2 \leq y \leq 0 \\ -1 \leq x \leq 0}} \quad x - 2y$$

1. Montrer que le problème admet au moins une solution.
2. Dessiner la contrainte $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -x^2 \leq y \leq 0, \ \ -1 \leq x \leq 0\}$.
3. Montrer que, tout point $(x,y) \in K$ avec $(x,y) \neq (0,0)$, la contrainte est qualifiée en (x,y).
4. Trouver l'ensemble des points vérifiants les conditions nécessaires d'optimalité.
5. Déterminer la ou les solutions du problème.

Exercice 2. On considère le problème de programmation linéaire

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in K} \langle a, x \rangle$$

où $a \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{J \times n}$, $d \in \mathbb{R}^J$ (n et J sont des entiers non nuls) et où

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n, \ \ Cx = d \qquad \text{et} \qquad x_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

On suppose que K est non vide et que le problème $(\mathcal{P})$ admet un minimum. On admettra l'égalité[1] :

$$\inf_{x \in K} \langle a, x \rangle = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^n_+, \, \mu \in \mathbb{R}^J} \ \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \ \{\langle a, x \rangle - \langle \lambda, x \rangle + \langle \mu, (Cx - d) \rangle\}. \tag{1}$$

1. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème.
2. En utilisant l'égalité (1), démontrer que

$$\inf_{x \in K} \langle a, x \rangle = - \inf_{\mu \in \tilde{K}} \langle d, \mu \rangle$$

où

$$\tilde{K} := \{\mu \in \mathbb{R}^J, \ (C^T \mu)_j + a_j \geq 0, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

3. On suppose que $x \in K$ et $\mu \in \tilde{K}$. Montrer que $\langle a, x \rangle + \langle d, \mu \rangle \geq 0$.
4. Soit x^* un point de minimum du problème $(\mathcal{P})$ et $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^d_+ \times \mathbb{R}^J$ les multiplicateurs associés dans les conditions nécessaires d'optimalité de x^*. Montrer que μ^* est un point de minimum du problème

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \qquad \inf_{\mu \in \tilde{K}} \langle d, \mu \rangle.$$

1. Cette égalité de dualité a été prouvée dans le cours dans un contexte un tout petit peu différent.

5. On suppose que x^* est un point de minimum de $(\mathcal{P})$ et μ^* est une solution de $(\tilde{\mathcal{P}})$. Montrer alors que $\langle a, x^*\rangle + \langle d, \mu^*\rangle = 0$.

Exercice 3. Soit A une matrice carrée $d \times d$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^d$, $C \in \mathbb{R}^{J\times d}$, $d \in \mathbb{R}^J$ (comme toujours, les vecteurs sont assimilés à des matrices colonnes). Dans toute la suite, $\|\cdot\|$ désigne à la fois les normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^d$ et sur $\mathbb{R}^J$, et les normes matricielles associées.

On cherche à résoudre

$$\min_{Cx=d} \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle.$$

On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $Cx = d$.

1. Montrer que le problème admet un unique point de minimum noté x^*.
2. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité. On notera $\mu^* \in \mathbb{R}^J$ un lagrangien associé au problème.

   On cherche à résoudre numériquement le problème. Etant donnés des pas $\tau_1 > 0$ et $\tau_2 > 0$ et des conditions initiales $x^0 \in \mathbb{R}^d$ et $\mu^0 \in \mathbb{R}^J$, on définit par récurrence la suite

$$\begin{cases} x^{n+1} = x^n - \tau_1(Ax^n + b + C^T\mu^n) \\ \mu^{n+1} = \mu^n + \tau_1\tau_2(Cx^{n+1} - d) \end{cases}$$

3. Montrer que l'on peut choisir $\tau_1 > 0$ suffisamment petit pour que $\|I_d - \tau_1 A\| < 1$ (où I_d est la matrice identité de format d). On fera ce choix par la suite et on posera alors $\beta := \|I_d - \tau_1 A\|$.
4. En utilisant le fait que x^* vérifie les contraintes, montrer que l'on a

$$\left\| \mu^{n+1} - \mu^*\right\|^2 \leq \|\mu^n - \mu^*\|^2 + 2\tau_1\tau_2\langle(\mu^n - \mu^*), C(x^{n+1} - x^*)\rangle + (\tau_1\tau_2)^2\|C^TC\|\|x^{n+1} - x^*\|^2.$$

5. En utilisant les conditions d'optimalité et la définition de x^{n+1}, vérifier que

$$\tau_1 C^T(\mu^n - \mu^*) = -(x^{n+1} - x^*) + (I_d - \tau_1 A)(x^n - x^*).$$

6. En déduire que

$$\gamma\|x^{n+1} - x^*\|^2 \leq \left(\frac{\|\mu^n - \mu^*\|^2}{\tau_2} + \beta\|x^n - x^*\|^2\right) - \left(\frac{\|\mu^{n+1} - \mu^*\|^2}{\tau_2} + \beta\|x^{n+1} - x^*\|^2\right)$$

   où $\gamma := (2 - \tau_1^2\tau_2\|C^TC\| - 2\beta)$ sera supposé strictement positif (grâce au fait que $\beta \in]0, 1[$ et à un choix judicieux de τ_2).
7. En déduire que (x^n) converge vers x^*.
8. Quel est la différence entre cet algorithme et l'algorithme d'Uzawa ?

Barême indicatif : Exercice 1 = 7 points, Exercice 2 = 6 points, Exercice 3 = 8 points.