Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2

11 avril 2008
Examen Partiel

(seul la feuille des DL usuels est autorisée)

Question de cours 1 (5 points)**.** Donner la définition de fonction uniformément continue et montrer que toute fonction continue sur un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

Exercice 2 (4 points)**.** Calculer, si elle existe, en justifiant sa réponse, la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - \arctan(x)}{x^5}.$$

Exercice 3 (3 points)**.** Soit $f : [-2, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = x^3 + |x|.$$

Trouver, si ils existent, les valeurs de minimum et de maximum globaux de f, ainsi que les points où elles sont réalisées.

Exercice 4 (9 points)**.** Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable et $n \in \mathbb{N}$, considérons l'intégrale suivante :

$$I_n := \int_a^b f(t)\sin(nt)dt.$$

1. Demontrer que cette intégrale est bien définie, c'est-à-dire que la fonction intégrande $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est bien intégrable ;
2. calculer la valeur de cette intégrale dans le cas où f est la constante 1 ;
3. montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ pour toute fonction constante f ;
4. montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ pour toute fonction étagée f ;
5. montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ pour toute fonction $f \in C^1([a, b])$;
6. montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ pour toute fonction intégrable f (il peut être utile approcher f par une fonction étagée g telle que $\int_a^b |g(t) - f(t)|dt < \varepsilon$) ;
7. calculer la valeur de I_n si $b = -M$ et $a = M$ (pour un $M > 0$), $n \geq 1$ et f est paire ;
8. calculer la valeur de I_n pour $[a, b] = [0, \pi]$ et $f(t) = t$.